

导数中的数列

1. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

(1) 分析函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \ln 3 \leq \ln \left(\frac{n^2+n}{2}\right)$, $n \geq 2$.

2. 已知函数 $f(x) = |x-a| - \ln x (a > 0)$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 比较 $\frac{\ln 2^2}{2^2} + \frac{\ln 3^2}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n^2}{n^2}$ 与 $\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$ 的大小 ($n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n > 2$), 并证明你的结论.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 1$, 且 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求 a_2 的最小值;

(2) 求证: $\sum_{k=1}^n a_k > \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 2$.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{x \ln x + a + 1}{x}$, 在区间 $[1, 2]$ 有极值.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $f(x) > \frac{a(\sin x + 1)}{x}$.

5. 已知函数 $f(x) = \ln x - x$.

(1) 若 $\frac{f(x)+x}{x-1} > \frac{a}{x+1}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $h(x) = f(x) + m$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $x_2^2 + x_1 > m + 1$.

6. 已知函数 $f(x) = e \ln x - x + 1$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 证明: $\frac{n(n+1)}{\ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)} > 2e$ ($n \in \mathbf{N}^*$, 且 $n \geq 2$).

7. 已知函数 $f(x) = 2a \ln x - x + \frac{1}{x}$.

(I) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x)$ 对任意 $x \in (0, 1]$ 均有 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 求证: $\sum_{k=1}^n \ln^2 \frac{k+1}{k} < 1 - \frac{1}{n+2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

8. 已知函数 $f(x) = 2(x+1)\ln(x+1) - x^2 - 2x$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$, $T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求证: $\ln[(n+2)T_n] < 1 - \frac{n}{2}$.

9. 已知函数 $f(x) = m \ln(1+x) - x$, $g(x) = mx - \sin x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 求实数 m 的值;

(2) 求证: $(1 + \sin 1) \left(1 + \sin \frac{1}{1 \times 2}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{2 \times 3}\right) \cdots \left(1 + \sin \frac{1}{(n-1) \times n}\right) < e^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$,

且 $n \geq 2$).

10. 已知函数 $f(x) = -2x^2 + 4x$, $g(x) = a \ln x$ ($a > 0$)

(I) 若直线 l_1 交函数 $f(x)$ 的图象于 P, Q 两点, 与 l_1 平行的直线 l_2 与函数 $f(x)$ 的图象切于点 R, 求证 P, R, Q 三点的横坐标成等差数列;

(II) 若不等式 $f(x) \leq 4x - g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 求证: $\frac{\ln 2}{2^4} + \frac{\ln 3}{3^4} + \frac{\ln 4}{4^4} + \cdots + \frac{\ln n}{n^4} < \frac{1}{e}$ (其中 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$, e 为自然对数的底数).

11.

已知函数 $f(x) = \ln x - x + 1$ ($x \in [1, +\infty)$), 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = e, \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(II) 求 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)$;

(III) 求证: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \leq e^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

12. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a=1$ 时, 证明: $f(x) \leq x^2 + x - 1$;

(III) 求证: 对任意正整数 n , 都有 $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < e$ (其中 $e \approx 2.7183$ 为自然对数的底数)

13. 设函数 $f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{x} (x > 0)$.

(1) 若 $f(x) > \frac{k}{x+1}$ 恒成立, 求整数 k 的最大值;

(2) 求证: $(1+1 \times 2) \cdot (1+2 \times 3) \cdots [1+n \times (n+1)] > e^{2n-3}$.

14. 设函数 $f(x) = x^2 + b \ln(x+1)$, 其中 $b \neq 0$.

(1) 当 $b=2$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $(0,0)$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 当 $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $n \geq 2$ 时, 证明不等式

$$\ln \left[\left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} + 1\right) \right] + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}.$$

15. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 在 $x=3$ 处的切线方程为 $y = 5x - 8$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = ke^x$ 恰有两个不同的实根, 求实数 k 的值;

(3) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_1 = f(2)$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

证明: ① $a_{n+1} > a_n > 1$;

$$\textcircled{2} S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2019}} < 2.$$

16.

已知函数 $f(x) = e^x - kx$, $x \in \mathbf{R}$

(I) 若 $k = e$, 试确定函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $k > 0$, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(|x|) > 0$ 恒成立, 试确定实数 k 的取值范围;

(III) 设函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$, 求证: $F(1)F(2)\cdots F(n) > (e^{n+1} + 2)^{\frac{n}{2}} (n \in \mathbf{N}^*)$.

17. 已知 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 求函数 $g(x)$ 的极值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上递增, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(2+k)^2} < \ln 3 - \ln 2$.

18. 已知函数 $f(x) = \ln x + \lambda \left(\frac{1}{x} - x \right) (\lambda \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $x > 1$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 恒成立, 求 λ 的最小值;

(2) 设数列 $a_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 其前 n 项和为 S_n , 证明: $S_{2n} - S_n + \frac{a_n}{4} > \ln 2$.

19. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = 1$ 时, 证明: $f(x) \leq x^2 + x - 1$;

(3) 试比较 $\frac{\ln 2^2}{2^2} + \frac{\ln 3^2}{3^2} + \frac{\ln 4^2}{4^2} + \cdots + \frac{\ln n^2}{n^2}$ 与 $\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$ ($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$) 的大小,

并证明你的结论。

20. 设函数 $f(x) = \ln(x+1) (x \geq 0)$, $g(x) = \frac{x(x+a+1)}{x+1} (x \geq 0)$.

(1) 证明: $f(x) \geq x - x^2$.

(2) 若 $f(x) + x \geq g(x)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\ln(n^2 + 3n + 2) > \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$.

21. 已知函数 $f(x) = x(\ln x - a) + 1$ 的最小值为 0. ($a \in \mathbb{R}$)

(1) 求 a 的值;

(2) 设 $x_n = \ln^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 求证: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > \frac{n}{2n+4}$.

22. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

(1) 当 $a = e$ (e 为自然对数的底数) 时,

(i) 若 $G(x) = f(x) - 2x - m$ 在 $[0, 2]$ 上恰有两个不同的零点, 求实数 m 的取值范围;

(ii) 若 $T(x) = f(x) \cdot \left(\frac{n}{2}x + 1 - \frac{n}{2}\right)$ ($n \in \mathbb{R}$), 求 $T(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值;

(2) 当 $a = 2$ 时, $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $(f(n) - 1)b_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \sum_{k=1}^n C_n^k a_k\right)$.

求证: $\sum_{k=1}^n b_k \leq 3 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

23. 已知函数 $f(x) = \ln(2x-1) - m(2x-1) + 1$, $m \in \mathbb{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(2, f(2))$ 处的切线与直线 $3x - y + 2 = 0$ 垂直, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 的图象恒在直线 $y = 1$ 的下方.

①求 m 的取值范围;

②求证: 对任意正整数 $n > 1$, 都有 $\ln[(2n)!] < \frac{4n(n+1)}{5}$.

24. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax + 1$ ($a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求证: $\frac{\ln 2}{2} \times \frac{\ln 3}{3} \times \frac{\ln 4}{4} \times \cdots \times \frac{\ln n}{n} < \frac{1}{n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$).

25. 已知自变量为 x 的函数 $f_n(x) = n(\ln x - \ln n) - \frac{e^x}{e^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + 1$ 的极大值点为 $x = P_n$,

$n \in \mathbb{N}^*$, $e = 2.718 \cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 若 $n = 1$, 证明: $f(x)$ 有且仅有 2 个零点;

(2) 若 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 为任意正实数, 证明: $\sum_{i=1}^n [f_i(x_i)P_i] < 4$.

26. 已知 $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{ax(1+x)}{1+ax} (a > 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$.

27. 设函数 $f(x) = 2\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 如果对所有的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \leq ax$, 求 a 的最小值;

(III) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $(1-a_{n+1})(1+a_n) = 1$, 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

求证:

$$S_n > \frac{a_{n+1}}{2a_n} - \ln a_{n+1}.$$

28. 已知函数 $f(x) = \ln(1 + \frac{a}{x})$, $f(1) = \ln 2$.

(1) 证明: $f(\frac{1}{x}) < x$;

(2) 若 $\frac{1}{n+1} [f(2) + f(2)^2 + \dots + f(2)^n] \leq m$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立, 求实数 m 的最小值.

29. 已知函数 $f(x) = x \ln x - x + 1$, $g(x) = e^x - ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 若 $g(x) \geq 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 求 a 的值;

(III) 求证: $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 1$.

30. 已知函数 $f(x) = e^x - x - 1$.

(1) 证明: $f(x) \geq 0$;

(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n , $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2}) \cdots (1 + \frac{1}{2^n}) < m$, 求 m 的最小值.

31. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$ (a 是常数, 且 $a > 0$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值时, 若关于 x 的方程 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上

恰有两个不相等的实数根, 求实数 b 的取值范围;

(3) 求证: 当 $n \geq 2$, $n \in N^*$ 时, $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e$.

32. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$, $a \in R$.

(1) 对定义域内的任意 x , 都有 $f(x) > 0$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求证: 对于任意大于 1 的正整数 n ,

$\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e$, 其中 e 为自然对数的底数.

33. 已知函数 $f(x) = (x+2)\ln(x+1) - ax$ ($a \in R$)

(I) 若 $a=1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 3n - 1$, $b_n = \frac{4}{a_n}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$T_n < \ln(n+1)(n+2)$.

34. 已知函数 $f(x) = a(x+1)\ln(x+1) - x^2 - ax$ ($a > 0$) 是减函数.

(1) 试确定 a 的值;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ ($n \in N^*$), 求证:

$\ln[(n+2)T_n] < 1 - \frac{n}{2}$.

35. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = a(x-1)$

(I) 当 $a=2$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的单调递减区间;

(II) 若 $x > 1$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) < g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 1 + a_n$, $a_3 = 3$, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证:

$$\ln(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n) < S_n.$$

36. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - (2a+1)x + (a+1)$.

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 分析 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若对 $\forall x > 1$, 都有 $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $\frac{n^2+1}{n^2} \cdot \frac{n^2+2}{n^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2+k}{n^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2+n}{n^2} > \sqrt{e}$ 对任意正整数 n 均成立, 其中 e 为自然对数的底数.

37. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x} (a > 0)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$. 函

数 $g(x) = f(x) - \ln x$.

(1) 求 ab 的值, 并求函数 $g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 的最小值

(2) 证明: $\sum_{k=1}^n \ln k < \frac{n^2+n}{4} (n \geq 1, n \in N^*)$

38. 若函数 $f(x) = a \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - a(x+1) - \frac{1}{2}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 求证: 对任意的正整数 n 都有, $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{1}{\ln n} > \frac{n-1}{n}$.

39. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 R_n , 记 $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$, $b_n = \frac{R_{n-1}}{n} + S_n a_n (n \geq 2)$,

且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

(1) ① 计算 $T_1 - S_1 R_1$, $T_2 - S_2 R_2$ 的值;

② 猜想 R_n, S_n, T_n 满足的关系式, 并用数学归纳法加以证明;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, 证明: $T_n < 2 + 2 \ln n$.

40. 已知函数 $f(x) = \ln x + 3x - ax^2$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 1$.

(1) 确定实数 a 的值, 并求函数 $y = f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $n \in N^*$, 求证:

$$\ln(1+1) + 2\ln\left(\frac{1}{2}+1\right) + 3\ln\left(\frac{1}{3}+1\right) + \cdots + n\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) < (\sqrt{n}+2)^2 - 6.$$

41. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{3x-2a}{2x}$.

(1) 求函数 $F(x) = f(x) - x + 2$ 在 $x \in [4, +\infty)$ 上的最大值;

(2) 若函数 $H(x) = 2f(x) - \ln[g(x)]$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上有零点, 求 a 的取值范围;

(3) 求证: $4034\ln 2 < \sum_{k=1}^{2017} [2f(2k+1) - f(k+1) - f(k)] < 4035 (k \in N^*)$.

42. 已知函数 $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

(1) 若函数在区间 $(a, a + \frac{1}{2})$ 上存在极值, 其中 $a > 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 如果当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{k}{x+1}$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围;

(3) 求证: $[(n+1)!]^2 > (n+1) \cdot e^{n-2} (n \in N^*)$.

43. 已知函数 $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

(1) 如果当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{a}{x+1}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: $e^{\frac{1}{2 \times 1^2 + 1}} + e^{\frac{1}{2 \times 2^2 + 1}} + \cdots + e^{\frac{1}{2n^2 + 1}} < n + 2 (n \in N^*)$.

44. 已知 $f(x) = a \sin x$, $g(x) = \ln x$, 其中 $a \in R$, 函数 $y = h(x)$ 与 $y = g(x)$ 关于直线 $y = x$ 对称.

(1) 若函数 $G(x) = f(1-x) + g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上递增, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(1+k)^2} < \ln 2$;

(3) 设 $F(x) = h(x) - mx^2 - 2(x+1) + b (m < 0)$, 其中 $F(x) > 0$ 恒成立, 求满足条件的

最小正整数 b 的值.

45. 设函数 $f(x) = x^2 - a \ln(x+1)$, 其中 $a \in R$

(1) 当 $a < 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 在其定义域上的单调性;

(2) 证明: 对任意的正整数 n , 不等式 $\ln(n+1) > \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} \right)$ 都成立.

46. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若存在 $x_1 < x_2$, 且满足 $f(x_1) = f(x_2)$. 证明 $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) < 0$;

(3) 证明: $e^{2^0-1} + e^{2^1-1} + e^{2^2-1} + \dots + e^{2^n-1} \geq 2^{n+1} - 1$ ($n \in N$).

47. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \dots + (2n-1)a_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$, $n \in N^*$, 记

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

(1) 求 a_n 和 S_n ;

(2) 证明: $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) S_n < \ln n + 1$.

48. 已知函数 $f(x) = x \ln x + kx$, $k \in R$.

(1) 求 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若不等式 $f(x) \leq x^2 + x$ 恒成立, 求 k 的取值范围;

(3) 求证: 当 $n \in N^*$ 时, 不等式 $\sum_{i=1}^n \ln(4i^2 - 1) > \frac{2n^2 - n}{2n+1}$ 成立.

49. 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

(1) 求函数的单调区间;

(2) 如果当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{k}{x+1}$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围;

(3) 求证: $\sum_{k=1}^n [\ln k + \ln(k+1)] > \frac{n^2 - n - 1}{n+1}$ ($n \in N^*$) (说明: $\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$)

50. 已知函数 $f(x) = \sin x - ax$.

- (1) 对于 $x \in (0,1)$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 当 $a=1$ 时, 令 $h(x) = f(x) - \sin x + \ln x + 1$, 求 $h(x)$ 的最大值;
- (3) 求证: $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \ (n \in \mathbf{N}^*)$.

51. 已知函数 $f(x) = \sin x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$.

- (1) 证明: $f(x) \geq 0$;
- (2) 数列 $\{a_n\}$ 满足: $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = f(a_n) \ (n \in \mathbf{N}^*)$.

(i) 证明: $0 < a_n < \frac{1}{2} \ (n \in \mathbf{N}^*)$;

(ii) 证明: $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+1} < a_n$.

52. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{2}{3}, \frac{1}{a_n - 1} = \frac{2 - a_{n-1}}{a_{n-1} - 1} \ (n \geq 2)$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 用数学归纳法证明: $S_n < n + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{n+3}{2}\right)$.

53. 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax + 1, a \in \mathbf{R}$

- (1) 当 $x > 0$ 时, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;
- (2) 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 证明: $\frac{n}{2n+4} < \ln^2 2 + \ln^2 \frac{3}{2} + \cdots + \ln^2 \frac{n+1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

54. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax - 3 \ (a \in \mathbf{R})$.

- (I) 求 $f(x)$ 的单调区间
- (II) 设 $a=-1$, 求证: 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) + 2 > 0$
- (III) 求证: $\frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{\ln 3}{3} \cdot \frac{\ln 4}{4} \cdots \frac{\ln n}{n} < \frac{1}{n} \ (n \in \mathbf{N}_+ \text{ 且 } n \geq 2)$

55. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{ax}{x+1} \ (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 讨论函数 $f(x)$ 的极值;

(3)求证: $\ln(n+1) > \frac{1-1}{1^2} + \frac{2-1}{2^2} + \frac{3-1}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

56. 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) ①若 $a=1$, 求 $f(x)$ 的最小值

②求证: $[(n+1)!]^2 > (n+1) \cdot e^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

提示: $(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n+1)$

57. 已知函数 $f(x) = x \ln x$ 和 $g(x) = m(x^2 - 1) \quad (m \in \mathbb{R})$.

(1) $m=1$ 时, 求方程 $f(x) = g(x)$ 的实根;

(2) 若对任意的 $x \in (1, +\infty)$, 函数 $y = g(x)$ 的图象总在函数 $y = f(x)$ 图象的上方, 求 m 的取值范围;

(3) 求证: $\frac{4}{4 \times 1 - 1} + \frac{4 \times 2}{4 \times 2^2 - 1} + \cdots + \frac{4 \times n}{4 \times n^2 - 1} > \ln(2n+1) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

58. 已知函数 $f(x) = x - \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n , $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < m$, 求 m 的最小值.

59. 已知 $f(x) = x - \frac{a}{x} \quad (a > 0)$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + b$, 且直线 $y = 2x - 2$ 与曲线 $y = g(x)$ 相切.

(1) 求 b 的值;

(2) 若对 $[1, +\infty)$ 内的一切实数 x , 不等式 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{4i}{4i^2 - 1} > \ln(2n-1) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

60. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 证明: $\frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n}{n^2} < \frac{2n^2 - n - 1}{4(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$.

61. 已知函数 $f(x) = \ln(2x+a)$ ($x > 0, a > 0$), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $\ln 3 - \frac{2}{3}$.

(1) 求 a ;

(2) 讨论函数 $g(x) = f(x) - 2x$ ($x > 0$) 和 $h(x) = f(x) - \frac{2x}{2x+1}$ ($x > 0$) 的单调性;

(3) 设 $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, 求证: $\frac{5-2^{n+1}}{2^n} < \frac{1}{a_n} - 2 < 0$ ($n \geq 2$).

62. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + ax^2 - x$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 若对任意 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq 0$ 成立, 求 a 的取值范围;

(II) 证明: $\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) + \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) + \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{4}}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{2019}}) > 81$.

63. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x \ln x$, 函数 $g(x) = x + \frac{a}{x} - (\ln x)^2$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, x_0 是 $g(x)$ 的

一个极值点, 且 $g(x_0) = 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性

(2) 求实数 x_0 和 a 的值

(3) 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k^2-1}} > \frac{1}{2} \ln(2n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

64. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^3+1}$, $a_1 = 1$.

(1) 证明: $a_n \leq \frac{1}{2}$ ($n \geq 2$);

(2) 证明: $a_n > \frac{1}{\sqrt[3]{3n + \ln n + \frac{14}{9}}}$ ($n \in \mathbb{N}_+$).

65. 已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(x+a) + b$.

(I) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在点 $(0,1)$ 处有相同的切线, 求 a, b 的值;

(II) 当 $b = 0$ 时, $f(x) - g(x) > 0$ 恒成立, 求整数 a 的最大值;

(III) 证明: $\ln 2 + (\ln 3 - \ln 2)^2 + (\ln 4 - \ln 3)^3 + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n]^n < \frac{e}{e-1}$.

66. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{a}{x} (a > 0)$

(1) 若 $f(x) \geq \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

(2) 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} (n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*)$

67. 已知函数 $f(x) = 2x + 1 - \ln 2x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$ 上的最值;

(2) 求证: $\frac{\ln 1^2}{1^2} + \frac{\ln 2^2}{2^2} + \frac{\ln 3^2}{3^2} + \cdots + \frac{\ln n^2}{n^2} < n + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2} (n \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } n \geq 2)$.

68. 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $g(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x$, 且 $g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 其中 $x_1 \in (0, e]$, 求 $g(x_1) - g(x_2)$

的最小值;

(3) 证明: $\sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$.

69. 已知函数 $f(x) = x - a \ln x - 1$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的值;

(2) 求证: $\ln(2+1) + \ln(2^2+1) + \cdots + \ln(2^n+1) < 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{n(n+1)}{2} \ln 2$.

70. 已知 $f(x) = x - \frac{a}{x} (a > 0)$, $g(x) = 2 \ln x + bx$ 且直线 $y = 2x - 2$ 与曲线 $y = g(x)$ 相切.

(1) 若对 $[1, +\infty)$ 内的一切实数 x , 小等式 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $a=1$ 时, 求最大的正整数 k , 使得对 $[e, 3]$ ($e=2.71828$ 是自然对数的底数) 内的任

意 k 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 都有 $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{k-1}) \leq 16g(x_k)$ 成立;

(3) 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{4i}{4i^2-1} > \ln(2n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

71. 设 l 为曲线 $C: y = \frac{\ln x}{x}$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线.

(1) 求 l 的方程;

(2) 证明: 除切点 $(1, 0)$ 之外, 曲线 C 在直线 l 的下方;

(3) 求证: $\frac{\ln 2}{2^4} + \frac{\ln 3}{3^4} + \cdots + \frac{\ln n}{n^4} < \frac{2n^2 - 3n + 1}{4n}$ (其中 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$).

72. 已知 $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$, 直线 $x=1$, $x=n$, $y=0$ 与曲线 $y = \frac{1}{x}$ 所围成的曲边梯形的面积为 S . 其中 $n \in \mathbf{N}$, 且 $n \geq 2$.

(1) 当 $x > 0$ 时, $\frac{ax}{x+1} < \ln(x+1) < ax$ 恒成立, 求实数 a 的值;

(2) 请指出 S_1 , S , S_2 的大小, 并且证明;

(3) 求证: $\ln \frac{3n+1}{n+1} < \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3i-2} + \frac{1}{3i-1} - \frac{2}{3i} \right) < \ln 3$.

73. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - 1$.

(1) 若不等式 $f(x) \geq \frac{\ln a}{2a}$ 在 $x \in [a, 2a] (0 < a \leq e)$ 上有解, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $g(n) = \frac{1}{n+1} [\ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{2^2}) + \cdots + \ln(1 + \frac{1}{2^n})] \leq m$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立, 求 m 的最小值.

74. 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x + (1-k)x + 1$.

(1) 当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围;

(2) 证明: $\forall n \geq 2, n \in \mathbf{N}, \ln 5 + \ln 11 + \cdots + \ln(n^2 + n - 1) > n - 2 + \frac{2}{n+1}$.

75. 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 证明: $\frac{2^2}{1^2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{4^2}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{n^2} > 2e \ln(n+1)$.

76. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - bx + 1 (x \in \mathbf{R}, a, b \text{ 为实数})$ 有极值, 且在 $x=1$ 处的切

线与直线 $x - y + 1 = 0$ 平行.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 是否存在实数 a , 使得函数 $f(x)$ 的极小值为 1, 若存在, 求出实数 a 的值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 设函数 $g(x) = \frac{f'(x) - 2ax + b - 1}{x} - 2\ln x$ 试证明: $g(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立并

$$\text{证明 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \geq \ln n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (n \in N^*)$$

77. 已知函数 $f(x) = x - \ln(x + a)$ 的最小值为 0, 其中 $a > 0$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 求实数 k 的最小值;

(III) 证明 $\sum_{i=1}^n \frac{2}{2i-1} - \ln(2n+1) < 2 \quad (n \in N^*)$.

78. 已知函数 $g(x) = (1 + \frac{1}{x}) \ln x$, $h(x) = \frac{1}{x} - x$.

(1) 求证: 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $x=1$ 处的切线关于 x 轴对称;

(2) 若 $f(x) = g(x) + h(x)$

(i) 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(ii) 求证: $\ln \frac{e^n}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n} \quad (n \geq 2, n \in N^*)$.

79. 已知函数 $f(x) = 2\ln x - x^2$,

(1) 求函数 $y = f(x)$ 图象上一点 $A(1, f(1))$ 处的切线方程.

(2) 若方程 $f(x) - 2a = 0$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 内有两个不等实根, 求实数 a 的取值范围(e 为自然对数的底数).

(3) 求证 $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n} \geq \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (n \in N, \text{ 且 } n \geq 2)$

80. 函数 $f(x) = \sqrt[n]{x}(n - \ln x)$, 其中 $n \in N^*$, $x \in (0, +\infty)$.

(1) 若 n 为定值, 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 求证: 对任意 $m \in N^*$, 有 $\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(m+1) > 2(\sqrt{m+1}-1)^2$;

(3) 若 $n=2$, $\ln a \geq 1$, 求证: 对任意 $k > 0$, 直线 $y = -kx + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点.

81. 已知 $m \in R$, 函数 $f(x) = mx - \frac{m-1}{x} - \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

(1) 求 $g(x)$ 的最小值;

(2) 若 $y = f(x) - g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为单调增函数, 求实数 m 的取值范围;

(3) 证明: $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln n}{n} < \frac{n^2}{2(n+1)}$ ($n \in N^*$)

82. 已知 $f(x) = (x-2)e^x - m(x^2 - 2x)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 有且仅有一个极值点, 求函数 $g(x) = f(x) + x \ln x - x$ 的最小值;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n \left[\frac{(e+1)(k+1)}{k} - \frac{k+2}{k} e^{\frac{k}{k+1}} \right] > n + \ln(n+1)$ ($n \in N^*$).

83. 已知函数 $g(x) = x \ln x$, $h(x) = \frac{ax^2 - 1}{2}$ ($a > 0$).

(1) 若 $g(x) < h(x)$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 不等式 $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) < e^{\frac{3}{4}}$ 对于正整数 n 恒成立, 其中

$e = 2.71828 \cdots$ 为自然对数的底数.

84. 已知函数 $f(x) = e^x - kx$, $x \in R$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 为增函数, 试求实数 k 的取值范围.

(2) 当 $k > 0$, 若存在 $x \in (0, +\infty)$, 使 $f(x) \leq 0$ 成立, 试确定实数 k 的取值范围.

(3) 设函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$, 求证:

(i) $F(x_1)F(x_2) > e^{x_1+x_2} + 2$.

(ii) $F(1)F(2)\dots F(n) > (e^{n+1} + 2)^{\frac{n}{2}}, n \in \mathbf{N}^*.$

85. 已知函数 $f(x) = e^x - kx$.

(1) 若 $k = e$, 确定函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $k > 0$, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(|x|) > 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(3) 求证: 不等式 $\sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} > \frac{5}{4}(n+1)$ 对任意正整数 n 恒成立.

86. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{x-1} - k\ln x$, 且 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处的切线与直线

$2x + y - 2017 = 0$ 垂直.

(1) 求实数 k 值;

(2) 若不等式 $-t^2 - 2mt - 4 \left(f(x) \leq |m - 2e| - \ln(e^2 + 1) \right)$ 对任意的实数 t 及 $x \in (1, e^2 + 1]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 设 $a_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{n}$, 且数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $\frac{S_n}{\ln(n+1)} > 1$.

87. 已知函数 $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$, $g(x) = a(x-1)$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象恰好相切与点 $P(1, 0)$, 求实数 a 的值;

(2) 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 求证: $\ln(2n+1) \leq \sum_{i=1}^n \frac{4i}{4i^2 - 1} (n \in \mathbf{N}^+)$.

88. 设 $\{a_n\}$ 是正数数列, $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 且 $a_{n+1} = a_n - a_n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$. 求证: $S_n < 1 + \ln \frac{n+2}{3}$.

89. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $b_1 = 4$, 且 $2b_n = a_n + a_{n+1}$, $a_{n+1}^2 = b_n b_{n+1}$.

(1) 求 a_2, a_3, a_4 及 b_2, b_3, b_4 ;

(2) 猜想 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式, 并证明你的结论;

(3) 证明: 对所有的 $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_3}{b_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} < \sqrt{\frac{b_n - a_n}{b_n + a_n}} < \sqrt{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{b_n} - 1}}$.

90. 设函数 $f(x) = (1-ax)\ln(x+1) - bx$, 其中 a 和 b 是实数, 曲线 $y = f(x)$ 恒与 x 轴

相切于坐标原点.

(1) 求常数 b 的值;

(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 关于 $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{3}$ 的不等式 $m = -\frac{2a+1}{a}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 求证: 对于任意的正整数 n , 不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 恒成立.

91. 已知函数 $f(x)$ 是在 $(0, +\infty)$ 上每一点处均可导的函数, 若 $xf'(x) > f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

(I) ① 求证: 函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;

② 当 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 时, 证明: $f(x_1) + f(x_2) < f(x_1 + x_2)$;

(II) 已知不等式 $\ln(x+1) < x$ 在 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时恒成立, 求证:

$$\frac{1}{2^2} \ln 2^2 + \frac{1}{3^2} \ln 3^2 + \frac{1}{4^2} \ln 4^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \ln(n+1)^2 > \frac{n}{2(n+1)(n+2)}, (n \in N^*)$$

92. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 在 $x=1$ 处取得极值.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) + 2x = x^2 + b$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 b 的取值范围;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k-f(k)} > \frac{3n^2-n-2}{n(n+1)} (n \in N, n \geq 2)$. 参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$.

93. 已知函数 $f(x) = \ln x - kx + 1$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 试确定实数 k 的取值范围;

(2) 证明: $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 4}{15} + \dots + \frac{\ln n}{n^2-1} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{n^2+n+10}{4} (n \in N^*, n \geq 2)$.

94. 已知函数 $f(x) = -x^3 + x^2$, $g(x) = a \ln x (a \neq 0, a \in R)$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若对任意 $x \in [1, +\infty)$, 使得 $f(x) + g(x) \geq -x^3 + (a+2)x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 证明: 对 $n \in N^*$, 不等式 $\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n+2015)} > \frac{2015}{n(n+2015)}$ 成立.

95. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x^2) + ax (a \leq 0)$,

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值, 求 a 的值;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 证明: $\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right) - \left(1+\frac{1}{3^{2n}}\right) < \sqrt{e} (n \in N^*, e \text{ 为自然对数的底数})$.

96. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ (a 为常数), 曲线 $y = f(x)$ 在与 y 轴的交点 A 处的切线斜率为 -1 .

(1) 求 a 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2 + 1$;

(3) 证明: 当 $n \in N^*$ 时, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln \frac{(n+1)^3}{(3e)^n}$.

97. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x} (a \in R)$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 求证: $\frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{24} + \cdots + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n}{(n+1)!} < \frac{n-1}{2n+2}, n \geq 2 \text{ 且 } n \in N^*$.

98. 已知函数 $f(x) = a \ln x - x + 1 (a \in R)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求所有实数 a 的值;

(3) 证明: $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 3}{5} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{4} (n \in N, n > 1)$.

99. 设 $f(x) = \frac{(x+a)\ln x}{x+1}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x + y + 1 = 0$ 垂直.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $\forall x \in [1, +\infty), f(x) \leq m(x-1)$ 恒成立, 求 m 的取值范围;

(3) 求证: $\ln \sqrt[4]{2n+1} < \sum_{i=1}^n \frac{i}{4i^2-1} (n \in N^*)$.

100. (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{2}ax^2 - \ln(1+x)$, 其中 $a \in R$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求证: $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \dots + \frac{\ln 3^n}{3^n} < 3^n - \frac{5n+6}{6} (n \in N^*)$ 。