

2018-2019 学年度第一学期高二期中调研测试数学参考答案

1、 $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x \geq 1$. 2、-8 3、2 4、 $(0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$

5、4. 6、相交 7、15. 8、 $\frac{1}{3} \leq \frac{y}{x} \leq 3$. 9、充分不必要.

10、10 11、 $\sqrt{2}+1$ 12、4 13、 $(-3\sqrt{2}, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$ 14、8

15、解：(1) $\because$ 命题 $p: \frac{x^2}{m-1} + \frac{y^2}{m-4} = 1$ 表示双曲线为真命题，则 $(m-1)(m-4) < 0$,

$\therefore 1 < m < 4$ 3 分

(2) 命题 $q: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 < m$ 为真，则 $m > 2$ 6 分

因为命题 “ p 或 q ” 为真，“ p 且 q ” 为假，

所以命题 p 、 q 中一个为真，另一个为假。..... 7 分

当 p 真、 q 假时， $\begin{cases} 1 < m < 4 \\ m \leq 2 \end{cases}$ ，所以 $1 < m \leq 2$ 10 分

当 p 假、 q 真时， $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 4 \end{cases}$ ，所以 $m \geq 4$ 13 分

综上， $1 < m \leq 2$ 或 $m \geq 4$ 14 分

16、(1) 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线为 $y = \pm x$ ，且 $M(-3, 3)$ 在直线 $y = -x$ 上

所以，直线 l 与 $y = x$ 平行

直线 l 的方程为 $x - y + 6 = 0$ 6 分

(2) 当直线斜率不存在，则直线 l 的方程为 $x = -3$ ，满足题意.... 8 分

当直线斜率存在，可设直线 l 的方程为 $y - 3 = k(x + 3)$ ，即 $kx - y + 3k + 3 = 0$

依设得 $\frac{|2 + 3k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3 \Rightarrow k = -\frac{8}{15}$ 10 分

所以直线为： $8x + 15y - 21 = 0$ 12 分

综上，直线 l 的方程为 $x = -3$ 或 $8x + 15y - 21 = 0$ 14 分

17、解：(1)由题意得： $\begin{cases} PF_1^2 + PF_2^2 = F_1F_2^2 = 20 \\ PF_1 \cdot PF_2 = 8 \end{cases}$ 3 分

$$\therefore (PF_1 + PF_2)^2 = PF_1^2 + PF_2^2 + 2PF_1 \cdot PF_2 = 36$$

$$\therefore PF_1 + PF_2 = 6 \quad \text{.....5 分}$$

$$\therefore a = 3, b = 2$$

椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 7 分

$$(2) (PF_1 - PF_2)^2 = (PF_1 + PF_2)^2 - 4PF_1 \cdot PF_2 = 36 - 32 = 4 \quad \text{.....9 分}$$

$$\therefore |PF_1 - PF_2| = 2 \quad \therefore a_1 = 1 \quad \text{.....11 分}$$

$$\therefore c = \sqrt{5} \therefore b_1 = 2$$

双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 14 分

18、解：(1) $k = 1$ 2 分

$$(2) \textcircled{1} \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ (x-15)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\therefore x^2 - 29x + 200 = 0 \quad \text{.....4 分}$$

$$\therefore x = \frac{29 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$\therefore x_1 = 11.3, x_2 = 17.7$$

当鲸运动到点 $(11.3, \sqrt{11.3})$ 即 $(11.3, 3.4)$ 处，开始进入观测站 C 的观测区域内。...8 分

②鲸与点 C 的距离为

$$d = \sqrt{(x-15)^2 + y^2} = \sqrt{(x-15)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 29x + 225}$$

$$= \sqrt{(x - \frac{29}{2})^2 + 225 - (\frac{29}{2})^2} \quad \text{.....12 分}$$

$$\therefore x = \frac{29}{2} \text{ 时 } d \text{ 最小。}$$

当鲸运动到点 $(\frac{29}{2}, \frac{\sqrt{58}}{2})$ 即 $(14.5, 3.8)$ 处时，鲸离观测站 C 距离最近。16 分

19、解：(1) 由题可知，直线 AB 斜率显然存在，设为 k ，则直线 AB: $y=kx+1$.

因为 O 点到直线 AB 的距离 $d_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$,

$$\therefore \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 = 4,$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$$

$$\text{由 } 2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \text{ 得 } k^2 = 15.$$

因为直线 AB 与直线 CD 互相垂直，则直线 CD: $y = -\frac{1}{k}x + 1$,

$$\therefore \text{M 点到直线 CD 的距离 } d_2 = \frac{-\frac{2}{k} + 1 - 1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2}},$$

$$\therefore \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = 1 - \left[\frac{-\frac{2}{k} + 1 - 1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2}}\right]^2, \quad CD = 2\sqrt{1 - \frac{4}{k^2+1}} = 2\sqrt{1 - \frac{4}{15+1}} = \sqrt{3}. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 直线 AB 斜率为 2，则直线 AB 方程为 $2x - y + 1 = 0$

$$\therefore O \text{ 到直线 AB 距离为 } \frac{\sqrt{5}}{5}, M \text{ 到直线 AB 距离为 } d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{4 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{95}}{5}$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{4}{5} \sqrt{19} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

(3) 当直线 AB 的斜率不存在时， $\triangle ABE$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$; $\dots\dots 11 \text{ 分}$

当直线 AB 的斜率存在时，设为 k ，则直线 AB: $y=kx+1$, $k \neq 0$, 直线 CD: $y = -\frac{1}{k}x + 1$.

$$\text{由 } \frac{\left| -\frac{1}{k} \cdot 2 - 1 + 1 \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{k}\right)^2 + 1}} < 1 \text{ 得 } k^2 > 3, \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

所以 $k \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

$$\text{因为 } \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 = 4, \text{ 所以 } AB = 2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}.$$

$$\text{因为 E 点到直线 AB 的距离即 M 点到直线 AB 的距离 } d = \frac{|2k - 1 + 1|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$\text{所以 } \triangle ABE \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} AB \cdot d = 2\sqrt{\frac{(4k^2+3)k^2}{(k^2+1)^2}}. \quad \dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{令 } t = k^2 + 1 > 4, \text{ 则 } S = 2\sqrt{\frac{4t^2 - 5t + 1}{t^2}} = 2\sqrt{4 - \frac{5}{t} + \left(\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\because t > 4$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{t} < \frac{1}{4}$$

$$\therefore S \in \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, 4\right).$$

综上, $\triangle ABE$ 面积的取值范围是 $\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, 4\right]$16 分

20. (1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$4 分

(2) ①由题意知直线 PE, ME 的斜率存在且不为 0,

设直线 PE 的斜率为 k , 则 $PE: y = kx - 1$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 1, \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{18k}{9k^2 + 1}, \\ y = \frac{9k^2 - 1}{9k^2 + 1}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0, \\ y = -1, \end{cases} \therefore P\left(\frac{18k}{9k^2 + 1}, \frac{9k^2 - 1}{9k^2 + 1}\right) \quad \text{.....6 分}$$

$$\text{用 } -\frac{1}{k} \text{ 去代 } k, \text{ 得 } M\left(\frac{-18k}{k^2 + 9}, \frac{9 - k^2}{k^2 + 9}\right), \quad \text{.....8 分}$$

$$k_{PM} = \frac{\frac{9k^2 - 1}{9k^2 + 1} - \frac{9 - k^2}{k^2 + 9}}{\frac{18k}{9k^2 + 1} + \frac{18k}{k^2 + 9}} = \frac{k^2 - 1}{10k},$$

$$\therefore PM: y - \frac{9 - k^2}{k^2 + 9} = \frac{k^2 - 1}{10k} \left(x + \frac{18k}{k^2 + 9}\right), \text{ 即 } y = \frac{k^2 - 1}{10k}x + \frac{4}{5},$$

$$\therefore \text{直线 } PM \text{ 经过定点 } T\left(0, \frac{4}{5}\right). \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{②由 } \begin{cases} y = kx - 1, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{2k}{1 + k^2}, \\ y = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0, \\ y = -1, \end{cases} \therefore A\left(\frac{2k}{1 + k^2}, \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\right),$$

$$\text{则直线 } AB: y = \frac{k^2 - 1}{2k}x, \text{ 设 } t = \frac{k^2 - 1}{10k}, \text{ 则 } t \in R,$$

直线 PM : $y = tx + \frac{4}{5}$, 直线 AB : $y = 5tx$,

假设存在圆心为 $(m, 0)$, 半径为 $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ 的圆 G , 使得直线 PM 和直线 AB 都与圆 G 相交,

$$\begin{cases} \frac{|5tm|}{\sqrt{1+25t^2}} < \frac{3}{5}\sqrt{2}, & (i) \\ \frac{|mt + \frac{4}{5}|}{\sqrt{1+t^2}} < \frac{3}{5}\sqrt{2}, & (ii) \end{cases}$$

则13 分

由 (i) 得 $25t^2(m^2 - \frac{18}{25}) < \frac{18}{25}$ 对 $t \in R$ 恒成立, 则 $m^2 \leq \frac{18}{25}$,

由 (ii) 得, $(m^2 - \frac{18}{25})t^2 + \frac{8}{5}mt - \frac{2}{25} < 0$ 对 $t \in R$ 恒成立,

当 $m^2 = \frac{18}{25}$ 时, 不合题意;

当 $m^2 < \frac{18}{25}$ 时, $\Delta = (\frac{8}{5}m)^2 - 4(m^2 - \frac{18}{25})(-\frac{2}{25}) < 0$, 得 $m^2 < \frac{2}{25}$, 即 $-\frac{\sqrt{2}}{5} < m < \frac{\sqrt{2}}{5}$,

$\therefore$ 存在圆心为 $(m, 0)$, 半径为 $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ 的圆 G , 使得直线 PM 和直线 AB 都与圆 G 相交,

所有 m 的取值集合为 $(-\frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5})$16 分

解法二: 圆 $G: (x-m)^2 + y^2 = \frac{18}{25}$, 由上知 PM 过定点 $(0, \frac{4}{5})$, 故 $m^2 + (\frac{4}{5})^2 < \frac{18}{25}$; 又

直线 AB 过原点, 故 $G: m^2 + 0^2 < \frac{18}{25}$, 从而得 $m \in (-\frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5})$.