

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学寒假自主练习 (5)

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | (x-1)(x-6) > 0\}$, $B = \{x | 2-x > 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | x > 6\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$
C. $\{x | x < 1\}$ D. $\{x | 2 < x < 6\}$

2. 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 定义 $\boxed{z} = b + ai$. 若 $\frac{\boxed{z}}{1+i} = \frac{i}{2-i}$, 则 $z =$

- A. $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ B. $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ C. $-\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ D. $-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

3. “游客甲在烟台市”是“游客甲在山东省”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 函数 $f(x) = 2 - 2^x (x < 0)$ 的值域是

- A. $(1, 2)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(0, 2)$ D. $(1, +\infty)$

5. $(2x - \frac{1}{\sqrt[3]{4x}})^6$ 的展开式的中间项为

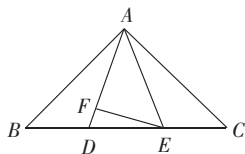
- A. -40 B. $-40x^2$ C. 40 D. $40x^2$

6. 张衡是中国东汉时期伟大的天文学家、数学家,他曾经得出圆周率的平方除以十六等于八分之五. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的每个顶点都在球 O 的球面上, $AB \perp$ 底面 BCD , $BC \perp CD$, 且 $AB = CD = \sqrt{3}$, $BC = 2$, 利用张衡的结论可得球 O 的表面积为

- A. 30 B. $10\sqrt{10}$ C. 33 D. $12\sqrt{10}$

7. 如图, 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为斜边 BC 的三等分点 (D 靠近点 B), 过 E 作 AD 的垂线, 垂足为 F , 则 $\overrightarrow{AF} =$

- A. $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
B. $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
C. $\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{15}\overrightarrow{AC}$
D. $\frac{8}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$

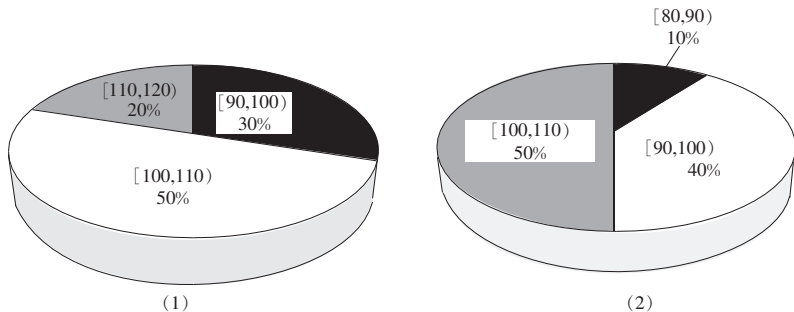


8. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2(\omega x - \frac{\pi}{12})$ ($\omega > 0$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则 ω 的最小值为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 为了了解运动健身减肥的效果, 某健身房调查了 20 名肥胖者, 健身之前他们的体重(单位: kg)情况如三维饼图(1)所示, 经过四个月的健身后, 他们的体重情况如三维饼图(2)所示.



对比健身前后, 关于这 20 名肥胖者, 下面结论正确的是

- A. 他们健身后, 体重在区间 $[90, 100)$ 内的人增加了 2 个
 B. 他们健身后, 体重在区间 $[100, 110)$ 内的人数没有改变
 C. 他们健身后, 20 人的平均体重大约减少了 8 kg
 D. 他们健身后, 原来体重在区间 $[110, 120)$ 内的肥胖者体重都有减少

10. 若 $10^a = 4$, $10^b = 25$, 则

- A. $a + b = 2$ B. $b - a = 1$ C. $ab > 8\lg^2 2$ D. $b - a > \lg 6$

11. 已知 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + y^2 = 1$ 上的动点, Q 是圆 $D: (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ 上的动点, 则

- A. C 的焦距为 $\sqrt{5}$
 B. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$
 C. 圆 D 在 C 的内部
 D. $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 已知函数 $f(x) = x + \sin x - x \cos x$ 的定义域为 $[-2\pi, 2\pi)$, 则

- A. $f(x)$ 为奇函数 B. $f(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上单调递增
 C. $f(x)$ 恰有 4 个极大值点 D. $f(x)$ 有且仅有 4 个极值点

第 II 卷

三. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 当 $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x} + 1}$ 取得最小值时, $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 P 为双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 右支上一点, F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点, 且线段 A_1A_2 , B_1B_2 分别为 C 的实轴与虚轴. 若 $|A_1A_2|$, $|B_1B_2|$, $|PF_1|$ 成等比数列, 则 $|PF_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 现将七本相同的书分给甲、乙、丙三人,每人至少一本,则甲分得的书不少于 3 本的概率是 _____.
16. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CD 上一点,且 $CE=2DE$, F 为棱 AA_1 的中点,且平面 BEF 与 DD_1 交于点 G ,与 AC_1 交于点 H ,则 $\frac{DG}{DD_1} = \rule{1.5cm}{0.4pt}$, $\frac{AH}{HC_1} = \rule{1.5cm}{0.4pt}$.

(本题第一空 2 分,第二空 3 分)

四. 解答题： 本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, ② $c\sin C=\sin A+b\sin B$, $B=60^\circ$, ③ $c=2$, $\cos A=\frac{1}{8}$ 三个条件中任选一个补充在下面问题中,并加以解答.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $a=3$, _____,求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18. (12 分)

设 $n \in \mathbb{N}^*$, 向量 $\overrightarrow{AB}=(3n+1,3)$, $\overrightarrow{BC}=(0,3n-2)$, $a_n=\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(1)试问数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是否为等差数列? 为什么?

(2)求数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (12 分)

某土特产超市为预估 2020 年元旦期间游客购买土特产的情况,对 2019 年元旦期间的 90 位游客购买情况进行统计,得到如下人数分布表.

购买金额(元)	[0,15)	[15,30)	[30,45)	[45,60)	[60,75)	[75,90]
人数	10	15	20	15	20	10

(1)根据以上数据完成 2×2 列联表,并判断能否在犯错误的概率不超过 0.05 的情况下认为购买金额是否少于 60 元与性别有关.

	不少于 60 元	少于 60 元	合计
男		40	
女	18		
合计			

(2)为吸引游客,该超市推出一种优惠方案,购买金额不少于 60 元可抽奖 3 次,每次中奖概率为 p (每次抽奖互不影响,且 p 的值等于人数分布表中购买金额不少于 60 元的频率),中奖 1 次减 5 元,中奖 2 次减 10 元,中奖 3 次减 15 元. 若游客甲计划购买 80 元的土特

产,请列出实际付款数 X (元)的分布列并求其数学期望.

附参考公式和数据: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},n=a+b+c+d.$

附表:

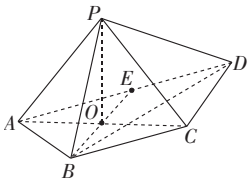
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635	7.879
$P(K^2\geq k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.010	0.005

20. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP\perp$ 平面 PCD , $AD\parallel BC$, $AB\perp BC$, $AP=AB=BC=\frac{1}{2}AD$, E 为 AD 的中点, AC 与 BE 相交于点 O .

(1)证明: $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)求直线 BC 与平面 PBD 所成角的正弦值.

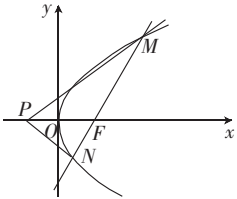


21. (12 分)

如图,已知点 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点,过点 F 的动直线 l 与抛物线 C 交于 M , N 两点,且当直线 l 的倾斜角为 45° 时, $|MN|=16$.

(1)求抛物线 C 的方程.

(2)试确定在 x 轴上是否存在点 P ,使得直线 PM , PN 关于 x 轴对称? 若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.



22. (12 分)

已知函数 $f(x)=2\ln(x+1)+\sin x+1$,函数 $g(x)=ax-1-b\ln x(a,b\in\mathbf{R},ab\neq 0)$.

(1)讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2)证明:当 $x\geq 0$ 时, $f(x)\leq 3x+1$.

(3)证明:当 $x>-1$ 时, $f(x)<(x^2+2x+2)e^{\sin x}$.