江苏省仪征中学 2019 届高三（上）期中考试热身练习 5

班级__________ 姓名__________ 学号__________ 评价__________

一、填空题：

1．已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$， $B=\{1,m\}$，$A\cup B=A$，则 m=________.

2．若$(a+b\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=25$ (a，$b\in\mathrm{R}$，i 为虚数单位)，则 $a+b$ 的值为________.

3．“$2^x<4$”是“$\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$”成立的______________条件．（从“充要”，“充分不必要”，“必要不充分”中选择一个正确的填写）

4．在直角坐标系 xoy 中，过双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，分别交该双曲线的两条渐近线于 A,B 两点，则线段 AB 的长为________.

5．若 $log_a 2<2$，则实数 a 的取值范围是________.

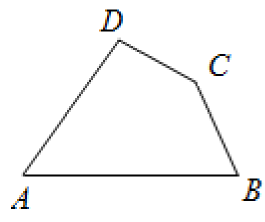
6．已知函数 $f(x)=x+\ln x-4$ 的零点在区间 $(k,k+1)$ 内，则正整数 k 的值为________.

7．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，其中 e 为自然对数的底数，则不等式 $f(x-2)+f(x^2-4)<0$ 的解集为________.

8．已知 P 为圆 C:$(x-1)^2+y^2=5$ 上任意一点，异于点 $A(2,3)$的定点 B 满足$\frac{PB}{PA}$为常数，则点 B 的坐标为_______.

9．在△ABC 中，若 9cos2A﹣4cos2B=5，则 $\frac{BC}{AC}$ 的值为________.

10．如图，在四边形 ABCD 中，$A=\frac{\pi}{3}$，AB=2，AD=3，分别延长 CB、CD 至点 E、F，使得 $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CD}$，其中 $\lambda>0$，若 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AD}=15$，则 λ 的值为__________.



11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax & (x\geqslant 1)\\ 2ax-1 & (x<1)\end{cases}$，若存在两个不相等的实数 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则 a 的取值范围为________________.

12．已知 a， b 均为正数，且 $ab-a-2b=0$，则 $\frac{a^2}{4}-\frac{2}{a}+b^2-\frac{1}{b}$ 的最小值为________.

二、解答题：

1. 在△ABC 中，已知$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin B+\sin C-\sin A)=3\sin B\sin C$.

(1)求角 A 的值；

(2)求$\sqrt{3}\sin B-\cos C$ 的最大值.

2. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$\left(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)设 F 是椭圆 C 的左焦点，过点 $P(-2，0)$的直线交椭圆于 A，B 两点，求△ABF 面积的最大值.

三、附加题：

1、设 $f\left(x,n\right)=\left(1+x\right)^{n},n\in N^{*}$.

（1）求 $f\left(x,6\right)$的展开式中系数最大的项；

（2）$n\in N^{*}$，化简$C_{n}^{0}4^{n-1}+C_{n}^{1}4^{n-2}+C_{n}^{2}4^{n-3}+\cdots+C_{n}^{n-1}4^{0}+C_{n}^{n}4^{-1}$；

（3）求证：$C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}+3C_{n}^{3}+\cdots nC_{n}^{n}=n\times 2^{n-1}$.

2、在姚明的婚礼上,为了活跃气氛,主持人邀请10位客人做一个游戏．第一轮游戏中,主持人将标有数字1,2,…,10的十张相同的卡片放入一个不透明箱子中,让客人依次去摸,摸到数字6,7,…,10的客人留下,其余的淘汰,第二轮放入1,2,…,5五张卡片,让留下的客人依次去摸,摸到数字3,4,5的客人留下,第三轮放入1,2,3三张卡片,让留下的客人依次去摸,摸到数字2,3的客人留下,同样第四轮淘汰一位,最后留下的客人获得小明准备的礼物．已知客人甲参加了该游戏．

(1)求甲拿到礼物的概率;

(2)设 ξ 表示甲参加游戏的轮数,求 ξ 的概率分布和数学期望 $E(\xi)$．

答案：

一、填空题：

1．已知集合 $A=\left\{1,3,\sqrt{m}\right\}$， $B=\left\{1,m\right\},A\cup B=A$，则 m=___▲___．3 或 0

2．若$(a+bi)(3-4i)=25$ (a，$b\in R$，i 为虚数单位)，则 $a+b$ 的值为___▲___．7

3．“$2^x<4$”是“$\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$”成立的___▲___条件．（从“充要”，“充分不必要”，“必要不充分”中选择一个正确的填写）

必要不充分

4．在直角坐标系 xoy 中，过双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，分别交该双曲线的两条渐近线于 A,B 两点，则线段 AB 的长为___▲___．4

5．若 $log_a 2<2$，则实数 a 的取值范围是___▲___． $\left(0,1\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

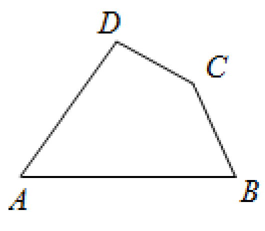
6．已知函数 $f\left(x\right)=x+\ln x-4$ 的零点在区间$\left(k,k+1\right)$内，则正整数 k 的值为___▲___．2

7．已知函数 $f\left(x\right)=e^x-\frac{1}{e^x}$，其中 e 为自然对数的底数，则不等式 $f\left(x-2\right)+f\left(x^2-4\right)<0$ 的解集为___▲___．$(-3,2)$

8．已知 P 为圆 C:$(x-1)^2+y^2=5$ 上任意一点，异于点 $A(2,3)$的定点 B 满足$\frac{PB}{PA}$为常数，则点 B 的坐标为___▲___． $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

9．在△ABC 中，若 9cos2A－4cos2B=5，则 $\frac{BC}{AC}$ 的值为___▲___． $\frac{2}{3}$

10．如图，在四边形 ABCD 中， $A=\frac{\pi}{3}$，AB=2，AD=3，分别延长 CB、CD 至点 E、F，使得 $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CD}$，其中 $\lambda>0$，若 $\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{AD}=15$，则 λ 的值为___▲___． $\frac{5}{2}$



11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax & (x\geqslant 1)\\ 2ax-1 & (x<1)\end{cases}$，若存在两个不相等的实数 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则 a 的取值范围为__▲__．$a\geq 0$

12．已知 a， b 均为正数，且 $ab-a-2b=0$，则 $\frac{a^2}{4}-\frac{2}{a}+b^2-\frac{1}{b}$ 的最小值为_▲_．7

二、解答题：

1. 在△ABC 中，已知$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin B+\sin C-\sin A)=3\sin B\sin C$.

(1)求角 A 的值；

(2)求$\sqrt{3}\sin B-\cos C$ 的最大值.

解 (1)∵$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin B+\sin C-\sin A)=3\sin B\sin C$，

∴由正弦定理得$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，∴$b^2+c^2-a^2=bc$，∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

∵$A\in(0，\pi)$，∴$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $A=\frac{\pi}{3}$得 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，

∴$\sqrt{3}\sin B-\cos C=\sqrt{3}\sin B-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\sqrt{3}\sin B-\left(-\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)=\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

∵$0<B<\frac{2\pi}{3}$，∴$\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

∴当 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$时，$\sqrt{3}\sin B-\cos C$ 的最大值为 1.

2. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$\left(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)设 F 是椭圆 C 的左焦点，过点 $P(-2，0)$的直线交椭圆于 A，B 两点，求△ABF 面积的最大值.

解：(1)因为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又椭圆 C 过点$\left(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$，所以$\frac{1}{4a^2}+\frac{7}{8b^2}=1$.

同时结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$，所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)由题知 $F(-1,0)$，显然直线 AB 的斜率存在且不为 0,设为 k,

则直线 AB 的方程为 $y=k(x+2)(k\neq 0)$，设点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=k(x+2),\end{cases}$

消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-2=0$，

故 $\Delta=(8k^2)^2-4(1+2k^2)(8k^2-2)=8(1-2k^2)>0$，

所以 $0<k^2<\frac{1}{2}$，且 $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{8k^2-2}{1+2k^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{8(1-2k^2)}{(1+2k^2)^2}}$.

点 F 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{8(1-2k^2)}{(1+2k^2)^2}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{-2k^4+k^2}{4k^4+4k^2+1}}=\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{6k^2+1}{4k^4+4k^2+1}}$.

令 $t=6k^2+1\in(1,4)$，则 $k^2=\frac{t-1}{6}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\times\frac{t}{t^2+4t+4}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\times\frac{1}{t+\frac{4}{t}+4}}\leq\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\times\frac{1}{4+4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $t=2$，$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$时取等号.

所以$\triangle ABF$ 面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

三、附加题：

1、设 $f(x,n)=(1+x)^n, n\in N^*$.

（1）求 $f(x,6)$ 的展开式中系数最大的项；

（2）$n\in N^*$，化简 $C_n^0 4^{n-1}+C_n^1 4^{n-2}+C_n^2 4^{n-3}+\cdots+C_n^{n-1}4^0+C_n^n 4^{-1}$；

（3）求证：$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots nC_n^n=n\times 2^{n-1}$.

解：（1）展开式中系数最大的项是第四项为 $C_n^3x^3=20x^3$；……………………………….3分

（2）$C_n^0 4^{n-1}+C_n^1 4^{n-2}+C_n^2 4^{n-3}+\cdots+C_n^{n-1}4^0+C_n^n 4^{-1}$

$=\frac{1}{4}\left[C_n^0 4^n+C_n^1 4^{n-1}+C_n^2 4^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}4+C_n^n\right]=\frac{1}{4}(4+1)^n=\frac{5^n}{4}$；……………………7 分

（3）因为 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$，

所以 $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots C_{n-1}^{n-1}\right)=n\times 2^{n-1}$. ………10 分

2、在姚明的婚礼上, 为了活跃气氛, 主持人邀请 10 位客人做一个游戏．第一轮游戏中, 主持人将标有数字 1, 2, ⋯, 10 的十张相同的卡片放入一个不透明箱子中, 让客人依次去摸, 摸到数字 6, 7, ⋯, 10 的客人留下, 其余的淘汰, 第二轮放入 1, 2, ⋯, 5 五张卡片, 让留下的客人依次去摸, 摸到数字 3, 4, 5 的客人留下, 第三轮放入 1, 2, 3 三张卡片, 让留下的客人依次去摸, 摸到数字 2, 3 的客人留下, 同样

第四轮淘汰一位,最后留下的客人获得小明准备的礼物．已知客人甲参加了该游戏.

(1)求甲拿到礼物的概率;

(2)设ξ 表示甲参加游戏的<u>轮数</u>,求ξ 的概率分布和数学期望$E(\xi)$.

解 :（1）甲拿到礼物的事件为A，

在每一轮游戏中，甲留下的概率和他摸卡片的顺序无关，则$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$，

答：甲拿到礼物的概率为$\frac{1}{10}$；

（2）随机变量ξ 的所有可能取值是1,2,3,4.

$P(\xi=1)=\frac{1}{2}$，$P(\xi=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，$P(\xi=3)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$，$P(\xi=4)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$，

随机变量ξ 的概率分布列为：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

所以$E(\xi)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}=2$.