

2020-2021 学年下学期期中学情调研

高二数学参考答案

一、单选题：

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	A	C	D	A	B

二、多项选择题：

9	10	11	12
BD	AD	ABC	BD

三、填空题：

13.56 14.1 15.2 , 4042 16. $-\frac{1}{2e} < m < 0$ 或 $0 < m < \frac{1}{e}$

四、解答题

17.解： (1) $i^{2021} + (2 - 3i + 8i - 12i^2) = 14 + 6i$ 4分

(2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + ai}{b - 4i} = \frac{(2 + ai)(b + 4i)}{b^2 + 16} = \frac{(2b - 4a) + (8 + ab)i}{b^2 + 16}$

因为 $\frac{z_1}{z_2}$ 是纯虚数，所以 $\begin{cases} 2b - 4a = 0 \\ 8 + ab \neq 0 \end{cases}$ 即 $b = 2a$

又因为 $z_1 + z_2 = (2 + b) + (a - 4)i = (2 + 2a) + (a - 4)i$ ，

所以 $z_1 + z_2$ 在复平面内对应的点为 $(2 + 2a, a - 4)$ ，

所以 $2 + 2a + a - 4 - 1 = 0$ 得 $a = 1$ ， $b = 2$ 8分

因为 $z_1 z_2 = (2 + i)(2 - 4i) = 8 - 6i$ ，所以 $|z_1 z_2| = 10$ 10分

18. (1) $A_6^6 = 720$ 3分

(2) $A_3^3 \cdot A_4^4 = 144$ 6分

(3) $(C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 + C_6^4 + \frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3}) A_3^3 = 540$ 11分

答：若将这些小球排成一排，则有 720 种排法；若 A, B, C 三个小球各不相邻，则有 144 种排法；若将这些小球放入甲，乙，丙三个不同的盒子，每个盒子至少一个球，则 540 种不同的放法12 分

19. (1) 证明：取 PD 的中点为 G ，分别连接 AG, QG

又因为 Q 为 PC 的中点，所以 $GQ \parallel DC$ ，且 $GQ = \frac{1}{2}DC$

又因为 $AB \parallel DC, DC = 2AB$ ，所以 $GQ \parallel AB, GQ = AB$ ，

所以四边形 $ABQG$ 是平行四边形，所以 $BQ \parallel AG$

又 $BQ \not\subset$ 平面 $PAD, AG \subset$ 平面 PAD ，所以 $BQ \parallel$ 平面 PAD 。

.....5 分

(2) 解：由 DA, DC, DP 三条直线两两相互垂直.

以 DA, DC, DP 分别为 z 轴， y 轴， x 轴建立空间直角坐标系如图，

因为在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC, AD \perp DC, DC = 2AB$ ，

所以点 B 在线段 CD 的垂直平分线上. 又因为 $BC = \sqrt{2}, BC \perp BD$ ，

所以 $BD = BC = \sqrt{2}, CD = 2$

所以有点 $D(0,0,0), B(1,1,0), C(0,2,0), Q\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ ，

所以 $\overrightarrow{DQ} = \left(0,1,\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BQ} = \left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$

设平面 BDQ 的一个法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0 \times x + 1 \times y + \frac{1}{2} \times z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BQ} = -1 \times x + 0 \times y + \frac{1}{2} \times z = 0 \end{cases} \quad \text{令 } z = 2, \text{ 得 } \vec{m} = (1, -1, 2)$$

易知平面 BCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{DP} = (0,0,1)$ ，

.....9 分

因为 $|\vec{m}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, |\overrightarrow{DP}| = 1, \vec{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 2$

所以 $\cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{DP} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{DP}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

.....11 分

所以锐二面角 $Q-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

.....12 分

说明：本题可以用综合法求解，取 CD 中点 M ，连接 QM, AM ，设 AM 与 BD 交于点 O ，连接 OQ ，证明

$\angle QOM$ 为二面角的平面角。

20. 解: (1) 由题意, $f'(x) = x^2 - (m+1)x \geq 0$ 在 $[2, +\infty)$ 恒成立, $\therefore m+1 \leq x$ 恒成立

$$\therefore m+1 \leq 2, \therefore m \leq 1 \quad \text{.....4 分}$$

$$(2) \because f'(x) = x[x - (m+1)]$$

当 $m+1 \leq 2$ 时, 即 $m \leq 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上递增, $\therefore f_{\min}(x) = f(2) = -2m + \frac{5}{3}$

当 $2 < m+1 < 3$ 时, 即 $1 < m < 2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[2, m+1]$ 上递减, 在区间 $[m+1, 3]$ 上递增

$$\therefore f_{\min}(x) = f(m+1) = -\frac{1}{6}(m+1)^3 + 1$$

当 $m+1 \geq 3$ 时, 即 $m \geq 2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上递减, $\therefore f_{\min}(x) = f(3) = -\frac{9}{2}m + \frac{11}{2}$ 10 分

$$\text{综上, } g(m) = \begin{cases} -2m + \frac{5}{3}, & m \leq 1 \\ -\frac{1}{6}(m+1)^3 + 1, & 1 < m < 2 \\ -\frac{9}{2}m + \frac{11}{2}, & m \geq 2 \end{cases} \quad \text{.....12 分}$$

21. 解 (1) $\because$ 平面 $EDAF \perp$ 平面 $ABCD$, $DE \subset$ 平面 $EDAF$

平面 $EDAF \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $DE \perp AD \therefore DE \perp$ 平面 $ABCD$

$\because AC \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore DE \perp AC$ $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 $\therefore AC \perp BD$

$\because DE, BD \subset$ 平面 BDE , $DE \cap BD = D$, $\therefore AC \perp$ 平面 BDE

$\because AC \subset$ 平面 $ACE \therefore$ 平面 $AEC \perp$ 平面 BDE 3 分

(2) 过点 F 作 $FG \perp AE$ 于点 G ,

因为平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

$AB \perp AD$, 所以 $AB \perp$ 平面 $ADEF$, 又 $FG \subset$ 平面 $ADEF$, 所以 $AB \perp FG$,

又 $AB \cap AE = A$, $AB, AE \subset$ 平面 ABE , 所以 $FG \perp$ 平面 ABE

所以线段 FG 的长即为点 F 到平面 ABE 的距离

在 $\triangle AEF$ 中, $AF = 1$, $AE = \sqrt{5}$, $EF = \sqrt{2}$, 由等积变换可求得 $FG = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

即点 F 到平面 ABE 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

.....6 分

(说明本题也可以用等体积变换求解, 也可用向量法求解)

(3) 建系如图

设平面 BEF 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, $E(0, 0, 2)$, $F(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BF} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 则 } \vec{n} = (1, 1, 1)$$

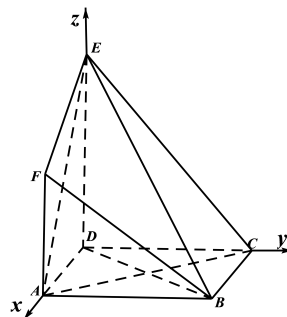
$$\text{设 } H(a, a, 0), \overrightarrow{EH} = (a, a, -2), \text{ 则 } |\cos \langle \overrightarrow{EH}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{2a-2}{\sqrt{3}\sqrt{2a^2+4}} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\text{解得 } a = \frac{2}{5} \text{ 或 } a = 2 \text{ (舍)}$$

.....10 分

$$\text{故 } H\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, 0\right), \therefore DH = \frac{2}{5}\sqrt{2}$$

.....12 分



22. 解: (1) 当 $a=1, b=3$ 时, $f(x) = x^2 - 3x + \ln x$,

$$\therefore f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(x-1)(2x-1)}{x}$$

$$\because x > 0, \text{ 令 } f'(x) > 0, \text{ 则 } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1; \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 则 } \frac{1}{2} < x < 1$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为 } (0, \frac{1}{2}), (1, +\infty), \text{ 单调递减区间为 } (\frac{1}{2}, 1) \quad \text{.....3 分}$$

$$(2) \text{ 由题可得 } f'(x) = \frac{2ax^2 - 2x + 1}{x} (x > 0),$$

$\because$ 函数 $f(x) = ax^2 - 2x + \ln x$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ,

$\therefore$ 方程 $2ax^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的正实数根,

$$\text{于是有 } \begin{cases} \Delta = 4 - 8a > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{a} > 0 \text{ 解得 } 0 < a < \frac{1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2a} > 0 \end{cases}$$

若不等式 $f(x_1) + f(x_2) > x_1 + x_2 + t$ 有解,

$$\therefore t < [f(x_1) + f(x_2) - (x_1 + x_2)]_{\max}.$$

$$\because f(x_1) + f(x_2) - (x_1 + x_2) = ax_1^2 - x_1 + \ln x_1 + ax_2^2 - x_2 + \ln x_2 - (x_1 + x_2)$$

$$= a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - 2(x_1 + x_2) + \ln(x_1 x_2) = -\frac{2}{a} - 1 - \ln(2a). \quad \text{.....5 分}$$

设 $h(a) = -\frac{2}{a} - 1 - \ln(2a) (0 < a < \frac{1}{2})$, $h'(a) = \frac{2-a}{a^2} > 0$, 故 $h(a)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调

递增, 故 $h(a) < h(\frac{1}{2}) = -5$, $\therefore t < -5$

.....7 分

(3) $g(x) = \ln x - bx$, 设 $g(x)$ 的两个相异零点为 x_1, x_2 ,

设 $x_1 > x_2 > 0$, 欲证 $x_1 x_2 > e^2$, 需证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$

$\because g(x_1) = 0, \quad g(x_2) = 0,$

$\therefore \ln x_1 - bx_1 = 0, \quad \ln x_2 - bx_2 = 0,$

$\therefore \ln x_1 - \ln x_2 = b(x_1 - x_2), \quad \ln x_1 + \ln x_2 = b(x_1 + x_2).$

要证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 即证 $b(x_1 + x_2) > 2$,

即 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}$, 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$,

设 $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$ 上式转化为 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$

.....10 分

设 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, $\therefore g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$, $\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(t) > g(1) = 0, \therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}, \therefore \ln x_1 + \ln x_2 > 2 \quad \therefore x_1 x_2 > e^2$

.....12 分