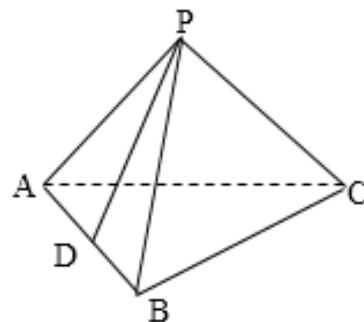


空间角

1. 已知三棱锥 $P-ABC$, $PA = PB = AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, D 为 AB 中点.

(1) 若 $PC = 3$, 求异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值;

(2) 若二面角 $P-AB-C$ 为 30° , 求 AC 与平面 PAB 所成角的正弦值.

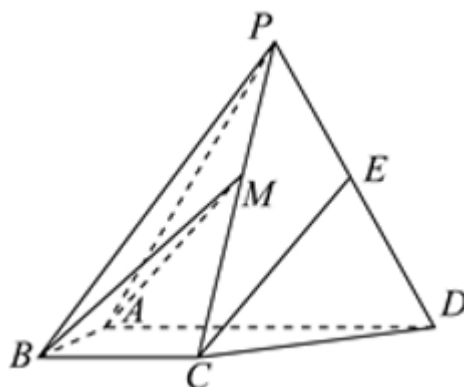


2. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$,

$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, E 是 PD 的中点.

(1) 证明: 直线 $CE \parallel$ 平面 PAB ;

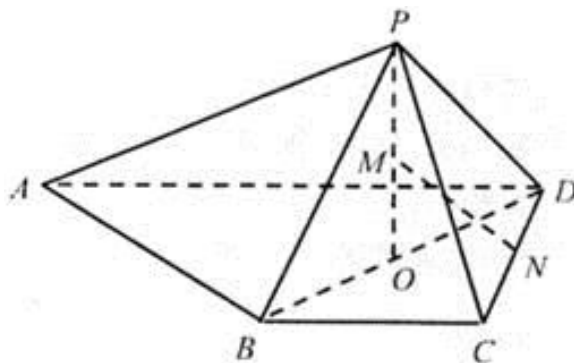
(2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° , 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.



3. 已知四棱锥 $P-ABCD$, $BC = CD = \frac{1}{2}DA$, $BC \parallel AD$, $\angle ADC = 90^\circ$, P 在底面 $ABCD$ 上的射影是 BD 的中点 O , $PC = \sqrt{2}$.

(I) 求证: 直线 $BD \perp$ 平面 POC ;

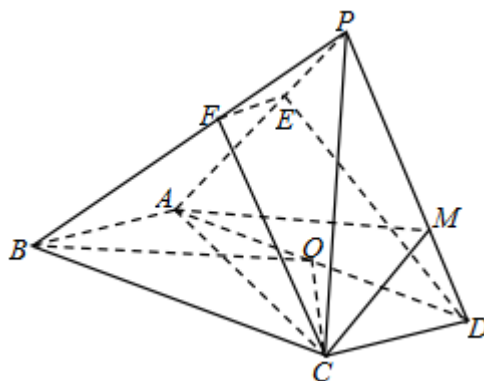
(II) 若 $BC = 1$, M 、 N 分别为 PO 和 CD 的中点, 求直线 MN 与平面 PCD 所成角的正弦值.



4. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形, O 是 AD 的中点, $BO = CO$, 过 CD 的平面 $CDEF$ 交平面 PAB 于 EF , $PD \perp EF$.

(1) 证明: $AB \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $AD = 2AB = 4$, $PA = PD$, 点 M 在侧棱 PD 上, 且 $PD = 3MD$, 二面角 $P-BC-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 求二面角 $M-AC-D$ 的正弦值.



空间角

1. 已知三棱锥 $P-ABC$, $PA = PB = AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, D 为 AB 中点.

(1) 若 $PC = 3$, 求异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值;

(2) 若二面角 $P-AB-C$ 为 30° , 求 AC 与平面 PAB 所成角的正弦值.

【答案】 解: (1) 取 AC 中点 E , 连结 PE ,

因为 D 为 AB 的中点, 所以 DE 为三角形 ABC 的中位线,

所以 $DE \parallel BC$, 则 $\angle PDE$ 为 PD 与 BC 所成的角,

在三角形 PAC 中, $PA = PB = AB = 3$, $PC = 3$, $AC = 5$, 所以 $PE \perp AC$,

又 $BC = 4$,

所以 $PE = \frac{\sqrt{11}}{2}$, $DE = 2$, $PD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{所以 } \cos \angle PDE = \frac{PD^2 + DE^2 - PE^2}{2 \times PD \times DE} = \frac{\frac{27}{4} + 4 - \frac{11}{4}}{2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2} = \frac{4\sqrt{3}}{9},$$

所以 PD 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$;

(2) 因为 $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, 所以 $AC^2 = AB^2 + BC^2$, 所以 $\angle ABC = 90^\circ$,

所以 $BC \perp AB$, 由(1)知: $DE \parallel BC$, 所以 $DE \perp AB$,

又 $PA = PB$, D 是 AB 的中点, 所以 $PD \perp AB$,

所以 $\angle PDE$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角, 则 $\angle PDE = 30^\circ$,

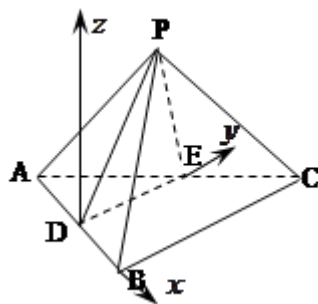
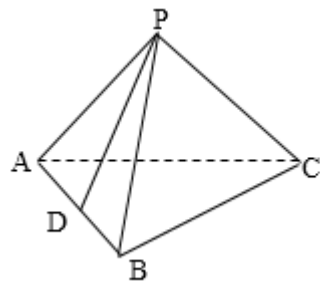
以 D 为坐标原点, DB 所在直线为 x 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

所以 $A(-\frac{3}{2}, 0, 0)$, $B(\frac{3}{2}, 0, 0)$, $C(\frac{3}{2}, 4, 0)$, $P(0, \frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$, 所以 $\overrightarrow{AC} = (3, 4, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (3, 0, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$,

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} 3x = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y + \frac{3\sqrt{3}}{4}z = 0 \end{cases}$

取 $y = 1$, 则 $z = -\sqrt{3}$, 所以 $\vec{n} = (0, 1, -\sqrt{3})$, 所以 $\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{4}{5 \times 2} = \frac{2}{5}$,

设 AC 与平面 PAB 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{2}{5}$, 即 AC 与平面 PAB 所成的角的正弦值为 $\frac{2}{5}$.



2. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$, $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, E 是 PD 的中点.

(1) 证明: 直线 $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45° , 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.

【答案】解: (1) 证明: 取 PA 的中点 F , 连接 EF , BF ,

因为 E 是 PD 的中点, 所以 $EF \parallel AD$, $EF = \frac{1}{2}AD$,

又 $AB = BC = \frac{1}{2}AD$, $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $BC \parallel AD$,

所以 $EF \parallel BC$, $EF = BC$,

所以四边形 $BCEF$ 是平行四边形, 可得 $CE \parallel BF$,

又 $BF \subset$ 平面 PAB , $CE \not\subset$ 平面 PAB , 所以直线 $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 如图所示, 取 AD 中点 O , 连接 PO , CO ,

由于 $\triangle PAD$ 为正三角形, 则 $PO \perp AD$,

因为侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PO \subset$ 侧面 PAD ,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $CO \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO \perp CO$.

因为 $AO = AB = BC = \frac{1}{2}AD$, 且 $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$,

所以四边形 $ABCO$ 是矩形, 所以 $CO \perp AD$,

以 O 为原点, OC 为 x 轴, OD 为 y 轴, OP 为 z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

不妨设 $AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1$, 则 $OA = OD = AB = CO = 1$.

又因为 $\triangle POC$ 为直角三角形, $|OC| = \frac{\sqrt{3}}{3}|OP|$, 所以 $\angle PCO = 60^\circ$.

作 $MN \perp CO$, 垂足为 N , 连接 BN ,

因为 $PO \perp CO$, 所以 $MN \parallel PO$,

又 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $MN \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\angle MBN$ 即为直线 BM 与平面 $ABCD$ 所成的角,

设 $CN = t$, 因为 $\angle PCO = 60^\circ$,

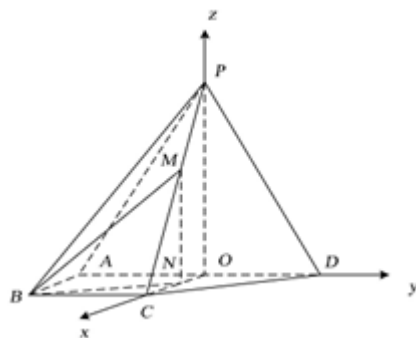
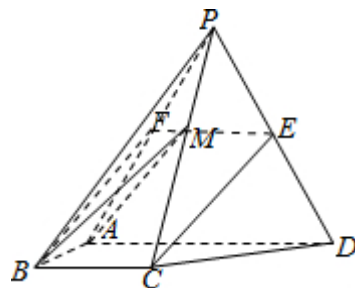
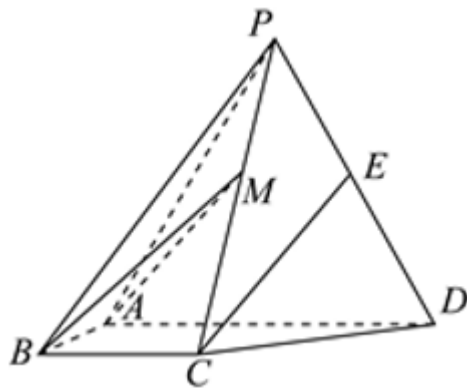
所以 $MN = \sqrt{3}t$, $BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} = \sqrt{t^2 + 1}$.

因为 $\angle MBN = 45^\circ$, 所以 $MN = BN$, 即 $\sqrt{3}t = \sqrt{t^2 + 1}$, 解得 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $ON = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $MN = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $A(0, -1, 0)$, $B(1, -1, 0)$, $M\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $D(0, 1, 0)$,

则 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{AM} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.



设平面 MAB 和平面 DAB 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}, \text{ 即} \begin{cases} x_1 = 0 \\ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x_1 + y_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}z_1 = 0 \end{cases}$$

可取 $z_1 = -2$, 则 $\vec{n}_1 = (0, \sqrt{6}, -2)$,

平面 DAB 的法向量可令 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, 所以 $\cos\langle\vec{n}_1, \vec{n}_2\rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{-2}{\sqrt{10} \times 1} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

因为二面角 $M-AB-D$ 是锐二面角, 所以其余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

3. 已知四棱锥 $P-ABCD$, $BC = CD = \frac{1}{2}DA$, $BC \parallel AD$, $\angle ADC = 90^\circ$, P 在底面 $ABCD$ 上的射影是 BD 的中点 O , $PC = \sqrt{2}$.

(I) 求证: 直线 $BD \perp$ 平面 POC ;

(II) 若 $BC = 1$, M 、 N 分别为 PO 和 CD 的中点, 求直线 MN 与平面 PCD 所成角的正弦值.

【答案】 解: (I) 由于 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO \perp BD$,

又 $BC = CD$, 并且 O 为 BD 的中点, 故 $CO \perp BD$

又 $PO \cap CO = O$, 所以 $BD \perp$ 平面 POC .

(II) 连接 ON , PN , 过 M 作 $MH \perp PN$, 垂足为 H , 由于 $ON \parallel BC$, 所以 $CD \perp ON$.

而 $PO \perp CD$, 故 $CD \perp$ 面 PON , $\therefore CD \perp MH$, $\therefore MH \perp$ 平面 PCD ,

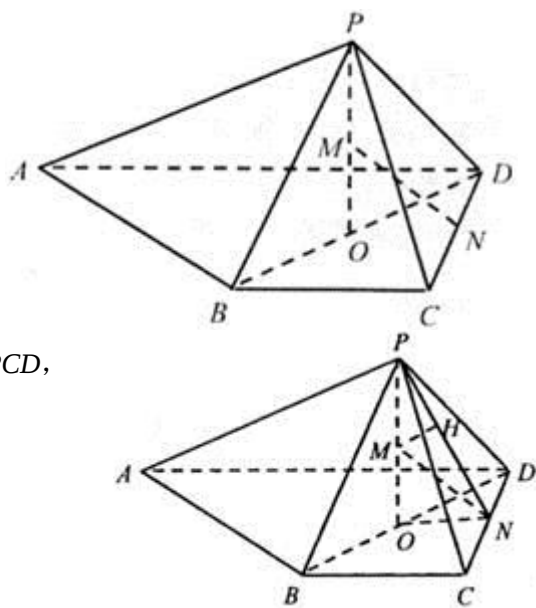
故 MN 与平面 PCD 所成的角为 $\angle MNH$,

由于 $BC = 1$, $PC = \sqrt{2}$, 所以 $PO = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $ON = \frac{1}{2}$.

故 $PN = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $MN = \frac{\sqrt{10}}{4}$,

由 $\triangle PMH \sim \triangle PON$ 可得 $\frac{MH}{ON} = \frac{MP}{PN}$, 即 $MH = \frac{\sqrt{42}}{28}$,

$\therefore \sin\angle MNH = \frac{MH}{MN} = \frac{\frac{\sqrt{42}}{28}}{\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{35}$ $\therefore$ 直线 MN 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{35}$.



4. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形, O 是 AD 的中点, $BO = CO$, 过 CD 的平面 $CDEF$ 交平面 PAB 于 EF , $PD \perp EF$.

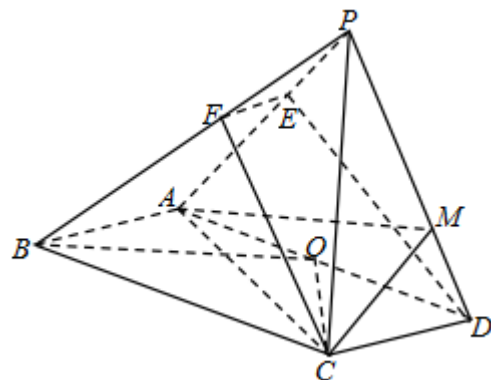
(1) 证明: $AB \perp$ 平面 PAD .

(2) 若 $AD = 2AB = 4$, $PA = PD$, 点 M 在侧棱 PD 上, 且 $PD = 3MD$, 二面角 $P-BC-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 求二面角 $M-AC-D$ 的正弦值.

【答案】 证明: (1) 因为底面 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $AB \parallel CD$,

$CD \not\subset$ 平面 PAB , $AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $CD \parallel$ 平面 PAB ,

因为过 CD 的平面 $CDEF$ 交平面 PAB 于 EF , 所以 $CD \parallel EF$



$\therefore AB \parallel EF$, 因为 $PD \perp EF$, 所以 $AB \perp PD$.

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, O 是 AD 的中点, $BO = CO$, 所以 $\triangle BAO \cong \triangle CDO$, $\angle BAO = \angle CDO$,

又 $\angle BAO + \angle CDO = 180^\circ$, 所以 $\angle BAO = \angle CDO = 90^\circ$, 所以 $AB \perp AD$.

因为 $AD \subset$ 平面 PAD , $PD \subset$ 平面 PAD , $AD \cap PD = D$, 所以 $AB \perp$ 平面 PAD .

解: (2) 由(1)知 $AB \perp$ 平面 PAD , $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, 设 N 为 BC 的中点, 连接 PO , PN ,

$\because PA = PD$, $\therefore PO \perp AD$, $\therefore PO \perp BC$,

$\because ON \perp BC$, $PO \cap ON = O$, $PO, ON \subset$ 平面 PNO ,

$\therefore BC \perp$ 平面 PNO , $PN \subset$ 平面 PNO , $\therefore PN \perp BC$,

$\therefore$ 二面角 $P-BC-D$ 的平面角为 $\angle PNO = \frac{\pi}{4}$, $\therefore PO = AB = 2$,

又面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, 面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$, $PO \perp AD$, $PO \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $ON \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PO \perp ON$, 又由(1)可得 $ON \perp OD$,

$\therefore OP, OD, ON$ 两两互相垂直.

以 O 为原点, ON, OD, OP 方向为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系,

则 $A(0, -2, 0)$, $B(2, -2, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$,

由 $PD = 3MD$, 得 $M(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, 则 $\overrightarrow{AC} = (2, 4, 0)$, $\overrightarrow{AM} = (0, \frac{10}{3}, \frac{2}{3})$, $\overrightarrow{BP} = (-2, 2, 2)$,

设平面 MAC 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x + 4y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{10}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}$$

取 $y = 1$, 得 $\vec{n} = (-2, 1, -5)$,

又平面 ACD 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$,

设二面角 $M-AC-D$ 为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-5|}{1 \cdot \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$ $\therefore$ 二面角 $M-AC-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

