2022 届高三数学午间练 6.11

1．一次表彰大会上，计划安排这 5 名优秀学生代表上台发言，这 5 名优秀学生分别来自高一、高二和高三三个年级，其中高一、高二年级各 2 名，高三年级 1 名．发言时若要求来自同一年级的学生不相邻，则不同的排法共有（　　）种．

A．36　　　　B．48　　　　C．72　　　　D．120

先排高一年级学生，有A_2^2种排法，①若高一年级学生中间有高三学生，有A_4^2种排法；②若高一学生中间无高三学生，有$C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1$种排法，所以共有$A_2^2\cdot\left(A_4^2+C_2^1C_2^1C_3^1\right)=48$种排法．

故选：B．

2．在一个箱子中装有大小形状完全相同的 3 个白球和 2 个黑球，现从中不放回的摸取 3 个球，设摸得的白球个数为X，黑球个数为Y，则（　　）

A．$E(X)>E(Y)$，$D(X)>D(Y)$　　　　B．$E(X)=E(Y)$，$D(X)>D(Y)$

C．$E(X)>E(Y)$，$D(X)=D(Y)$　　　　D．$E(X)=E(Y)$，$D(X)=D(Y)$

X的取值可能为 1，2，3，易知$P(X=1)=\dfrac{C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{6}{10}$，

$P(X=3)=\dfrac{1}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$，所以$E(X)=\dfrac{18}{10}$.

Y的取值可能为 0，1，2，易知$P(Y=0)=\dfrac{1}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$，$P(Y=1)=\dfrac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{6}{10}$，

$P(Y=2)=\dfrac{C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$，所以$E(Y)=\dfrac{12}{10}$.易知$E(X)>E(Y)$.

又$X+Y=3$，所以$D(X)=D(3-Y)=D(Y)$

故选：C

3．**(多选题)**已知函数$f\left(x\right)=-x^2\ln x$，则（　　）

A．$f\left(x\right)\le 0$恒成立

B．$f\left(x\right)$是$\left(0,+\infty\right)$上的减函数

C． $f\left(x\right)$在$x=e^{-\frac{1}{2}}$得到极大值$\frac{1}{2e}$

D． $f\left(x\right)$只有一个零点

【详解】

$\because f\left(x\right)=-x^2\ln x$，该函数的定义域为$\left(0,+\infty\right)$， $f'\left(x\right)=-2x\ln x-x=-x\left(2\ln x+1\right)$.

当$0<x<e^{-\frac{1}{2}}$时， $f'\left(x\right)>0$，此时函数 $f\left(x\right)$单调递增，

当$x>e^{-\frac{1}{2}}$时， $f'\left(x\right)<0$，此时函数 $f\left(x\right)$单调递减，

$\therefore f\left(x\right)_{极大值}=f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-e^{-1}\ln e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2e}$，故 B 选项错误，C 选项正确；

当$0<x<1$时， $\ln x<0$，此时 $f\left(x\right)=-x^2\ln x>0$，A 选项错误；

由 $f\left(x\right)=-x^2\ln x=0$，可得$\ln x=0$，解得$x=1$，D 选项正确.

故选：CD.

4．已知 $f_n(x)=(x^2+\frac{3a}{x^3})^n$， $n\in N^*$.

（1）当$a=1$时，求 $f_5(x)$展开式中的常数项；

（2）若二项式 $f_n(x)$的展开式中含有x^7的项，当n取最小值时，展开式中含x的正整数次幂的项的系数之和为 10，求实数a的值.

（1）当$n=5$，$a=1$时， $f\left(x\right)$的展开式的常数项为$T_3=9C_5^2=90$.

（2）令$2n-5r=7$，则$r=\frac{2n-7}{5}\in N$，所以n的最小值为 6，

当$n=6$时，二项式$\left(x^2+\frac{3a}{x^3}\right)^6$的展开式通项为

$T_{r+1}=C_6^r\left(3a\right)^r x^{12-5r}\quad\left(r=0,1,2,\cdots,6\right)$，

则展开式中含x的正整数次幂的项为T_1，T_2，T_3，它们的系数之和为

$C_6^0+C_6^1\left(3a\right)+C_6^2\left(3a\right)^2=135a^2+18a+1=10$，

即$15a^2+2a-1=0$，解得$a=-\frac{1}{3}$或$\frac{1}{5}$.