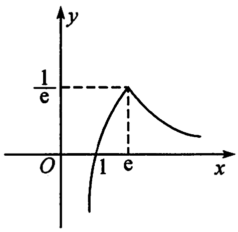
$y=a$，$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，问题转化为直线 $y=a$ 与函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有两个不同的交点. $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，令 $g'(x)=0$，得 $1-\ln x=0$，$x=\mathrm{e}$. 当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，且 $g(1)=0$；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，且 $\frac{\ln x}{x}$ 趋向于 0，$g(x)>0$，$g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，作出 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的大致图象如图所示，所以 $a\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.



（第 6 题）

7. $f(x)=4\cos x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sqrt{3}\cos x\sin x-2\cos^2 x$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$.

(1) 最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) 因为 A,B,C 为△ABC 的内角，且 $\sin C=2\sin B$，所以 $c=2b$.

又 $f(A)=2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)-1$ 是 $f(x)$ 的最大值，$2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$，所以 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

在△ABC 中，由余弦定理得 $b^2+4b^2-4b^2\cos\frac{\pi}{3}=16$，所以 $b^2=\frac{16}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

8. (1) 因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AB\parallel A_1B_1$，且 $AB=A_1B_1$，又点 M,N 分别是 AB,A_1B_1 的中点，所以 $MB=A_1N$，且 $MB\parallel A_1N$，所以四边形 A_1NBM 是平行四边形，从而 $A_1M\parallel BN$.

又 $BN\not\subset$ 平面 A_1MC，$A_1M\subset$ 平面 A_1MC，所以 $BN\parallel$ 平面 A_1MC.

(2) 因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

所以 $AA_1\perp$ 底面 ABC，

又 $AA_1\subset$ 侧面 ABB_1A_1，

所以侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC.

因为 $CA=CB$，且 M 是 AB 的中点，

所以 $CM\perp AB$.

又侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC，侧面 $ABB_1A_1\cap$ 底面 $ABC=AB$，$CM\perp AB$，且 $CM\subset$ 底面 ABC，所以 $CM\perp$ 侧面 ABB_1A_1.

又 $AB_1\subset$ 侧面 ABB_1A_1，所以 $AB_1\perp CM$.

因为 $AB_1\perp A_1M$，$A_1M,MC\subset$ 平面 A_1MC，且 $A_1M\cap MC=M$，所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1MC.

因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1MC，所以 $AB_1\perp A_1C$.

9. (1) 当点 F 与点 C 重合时，

由题设知 $S_{\triangle BEC}=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$，

即 $\frac{1}{2}EB\cdot h=\frac{1}{4}AB\cdot h$，其中 h 为平行四边形 $ABCD$ 中 AB 边上的高，

得 $EB=\frac{1}{2}AB$，

即 E 是 AB 的中点.

(2) 因为点 E 在线段 AB 上，所以 $0\leqslant x\leqslant 20$.

当 $10\leqslant x\leqslant 20$ 时，由(1)知，点 F 在线段 BC 上，

因为 $AB=20$ m，$BC=10$ m，$\angle ABC=120°$，

所以 $S_{\square ABCD}=AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=20\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=100\sqrt{3}(\mathrm{m}^2)$.

由 $S_{\triangle EBF}=\frac{1}{2}x\cdot BF\cdot\sin 120°=25\sqrt{3}$，得 $BF=\frac{100}{x}$. 由余弦定理，得