2021年普通高等学校招生全国统一考试·新高考模拟卷(一)

数　学

(满分:150分　考试时间:120分钟)

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|1<x<3\}$, $B=\{x|3<x<6\}$,则 $A\cap B=$

A. $(1,3)$　　B. $(1,6)$　　C. $(-1,3)$　　D. $\varnothing$

2. 已知复数 z 满足 $(3+i)z=1-3i$(i 为虚数单位),则 $z=$

A. i　　B. $-i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

3. 某学校数学建模小组为了研究双层玻璃窗户中每层玻璃厚度 d(每层玻璃的厚度相同)及两层玻璃间空气层厚度 l 对保温效果的影响,利用热传导定律得到热传导量 q 满足关系式 $q=\lambda_1\dfrac{|\Delta T|}{d\left(\dfrac{\lambda_1 l}{\lambda_2 d}+2\right)}$,其中玻璃的热传导系数 $\lambda_1=4\times10^{-3}$ 焦耳/(厘米·度),不流通、干燥空气的热传导系数 $\lambda_2=2.5\times10^{-4}$ 焦耳/(厘米·度),ΔT 为室内外温度差,q 值越小,保温效果越好,现有4种型号的双层玻璃窗户,具体数据如下表:

型号	每层玻璃厚度 d(单位:厘米)	玻璃间空气层厚度 l(单位:厘米)
A型	0.3	4
B型	0.4	3
C型	0.5	4
D型	0.3	3

则保温效果最好的双层玻璃的型号是

A. A型　　B. B型　　C. C型　　D. D型

4. 函数 $f(x)=x^3-3\ln x$ 的单调递增区间是

A. $(0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　　D. $(1,3)$

5. 已知点 F_1,F_2 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左,右焦点,P 是 C 的左支上一点,若直线 PF_1 的斜率为2,且 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形,则双曲线 C 的离心率为

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{3}$

6. 在正方形 $ABCD$ 中,M,N 分别是 BC,AD 的中点,若 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$,则 $m+n=$

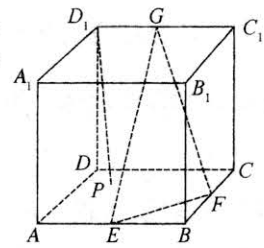
A. -1　　B. 0　　C. 2　　D. 1

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+4)=f(x)$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-3$，若方程 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在区间 $(0,10)$ 上有 5 个不同的实数根，则实数 a 的取值范围为

A. $\left(0,\frac{1}{8}\right]\cup[8,10)$　　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[6,10)$

C. $\left(0,\frac{1}{8}\right)\cup(6,10]$　　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(6,10]$

8. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=DD_1=1$，$AB=\sqrt{3}$，E,F,G 分别为 AB,BC,C_1D_1 的中点，点 P 在平面 $ABCD$ 内，若直线 $D_1P//$ 平面 EFG，则线段 D_1P 长度的最小值是



A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9.“幸福感指数”是指某个人主观地评价他对自己目前生活状态的满意程度的指标，常用区间 $[0,10]$ 内的一个数来表示，该数越接近 10 表示满意度越高. 现随机抽取 8 位市民，他们的幸福感指数分别为 9,7,8,8,9,6,4,5，则这组数据的

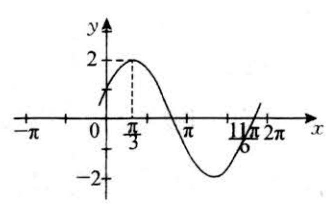
A. 极差为 5　　B. 中位数为 8　　C. 平均数为 7　　D. 方差为 3

10. 若正实数 a,b 满足 $a+b=1$，则下列选项中正确的是

A. ab 有最大值 $\frac{1}{4}$　　　B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

C. $3^{a-b}>\frac{1}{3}$　　　D. $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 有最小值 $\frac{9}{2}$

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，且 $f(x)$ 的图象关于点 $(x_0,0)$ 对称，则



A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $|x_0|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-1,2]$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+2}-S_{n-1}+1=3(S_{n+1}-S_n+1)(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$，$a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=11$，则

A. $a_4=19$　　B. $a_5=29$　　C. $a_7=49$　　D. $a_{11}=131$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点为 F，P 为 C 上一点，若 $|PF|=8$，则 P 点横坐标 $x_P=$ ________.

14. 已知 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{1}{3}$，则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ________.

15. 为了加强"精准扶贫"，实现伟大复兴的"中国梦"，某大学派遣甲、乙、丙、丁、戊五位同学参加 A、B、C 三个贫困县的调研工作，每个县至少去 1 人，且甲、乙两人不去同一个贫困县，则不同的派遣方案共有 ________ 种.

16. 已知圆锥的体积为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$，其底面半径和母线长的比为 $1:3$，则该圆锥内半径最大的球的体积为 ________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b+c}{\cos B+\cos C}$. 若 $\triangle ABC$ 还同时满足下列四个条件中的三个：①$a=2\sqrt{7}$，②$b=7$，③$c=6$，④$\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$，请指出这三个条件，并说明理由.

18.（12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1$，且 $b_{n+1}-b_n=2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

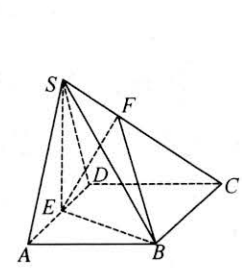
(2) 设 $c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，$SA=SD=\sqrt{2}$，$SB=2$，点 E 是棱 AD 的中点，点 F 在 SC 上，且 $SF=\dfrac{1}{3}SC$.

(1) 求证：$SA /\!/$ 平面 BEF；

(2) 求直线 SB 与平面 BEF 所成角的正弦值.



20.(12分)

为了加强全国高校学生在嵌入式芯片与系统设计应用领域的创新设计与工程实践能力,使学生能够全面掌握芯片设计或软硬适配系统优化、应用方案设计等不同技术层面的相关知识和技能,由中国电子学会组织了面向全国大学生的嵌入式芯片与系统设计暨全国大学生智能互联创新大赛.某院校有A,B,C三人参加此次比赛,他们进入总决赛的概率分别为$\frac{3}{4}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{2}$.

(1)求A,B,C三人中至少有1人进入总决赛的概率;

(2)假设该院校至少有1人进入了总决赛,院校决定对进入总决赛的学生进行奖励,奖金总额为3万元,规则如下:若只有一个人进入总决赛,则此人获得全部奖金;若有两个人进入总决赛,这两人平分奖金;若三个人都进入总决赛,则这三个人平分奖金.设A,B两人获得奖金数的和为ξ,求ξ的分布列和数学期望.

21.(12分)

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$e$,点$F_1,F_2$是$C$的左,右焦点,且$|F_1F_2|=6$.

(1)若$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,求椭圆C的标准方程;

(2)设直线$y=kx$与椭圆相交于A、B两点,M、N分别为线段AF_2、BF_2的中点,若$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$($O$是坐标原点),且$\frac{\sqrt{10}}{4}\leqslant e<\frac{\sqrt{6}}{3}$,求$k$的取值范围.

22.(12分)

已知函数$f(x)=ax\cos x-\sin x,a\in\mathbf{R}$.

(1)若$a=1$,求函数$f(x)$在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{2}]$上的最值;

(2)若不等式$x\geqslant f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上恒成立,求实数$a$的取值范围.

模拟卷·数学参考答案(一~六)

(一)

1. D

2. B $z=\frac{1-3i}{3+i}=\frac{(1-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{-10i}{10}=-i.$

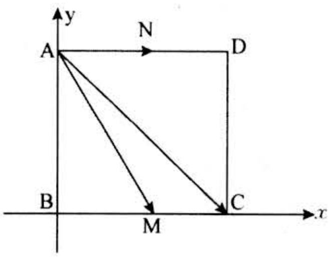
3. C $q=\lambda_1\frac{|\Delta T|}{d\left(\frac{\lambda_1 l}{\lambda_2 d}+2\right)}=\frac{4\times10^{-3}\times|\Delta T|}{\frac{4\times10^{-3}}{2.5\times10^{-4}}l+2d}=\frac{4\times10^{-3}\times|\Delta T|}{16l+2d}$，固定$|\Delta T|$，可知$16l+2d$最大时，$q$最小，保温效果最好，

对于A型：$16l+2d=16\times4+2\times0.3=64.6$；对于B型：$16l+2d=16\times3+2\times0.4=48.8$；

对于C型：$16l+2d=16\times4+2\times0.5=65$；对于D型：$16l+2d=16\times3+2\times0.3=48.6$.

4. B $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$. ∵函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，由$f'(x)>0$，得$x>1$，∴函数$f(x)$的单调递增区间是$(1,+\infty)$.

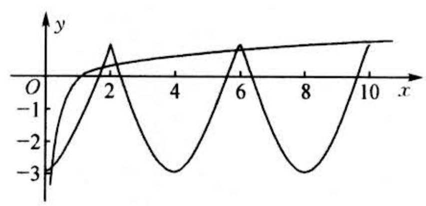
5. B ∵直线PF_1的斜率为2，$\triangle PF_1F_2$为直角三角形，∴$PF_2=2PF_1$，又$PF_2-PF_1=2a$，∴$PF_2=4a$，$PF_1=2a$. ∵$PF_2^2+PF_1^2=F_1F_2^2$，即$5a^2=c^2$，∴$e=\sqrt{5}$.



6. C 分别以BC，BA所在直线为x，y轴建立直角坐标系，如图，设正方形的边长为2，则$A(0,2)$，$C(2,0)$，$M(1,0)$，$N(1,2)$，∴$\overrightarrow{AC}=(2,-2)$，$\overrightarrow{AM}=(1,-2)$，$\overrightarrow{AN}=(1,0)$.

又$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$，∴$(2,-2)=m(1,-2)+n(1,0)$，∴$m=n=1$.

7. D 当$x\in[0,2]$时，$f(x)=x^2-3$，由此画出$f(x)$在区间$(0,10)$上的图象如图所示，$f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$在区间$(0,10)$有5个不同的实根，即函数$f(x)$与$y=\log_a x$的图象在$(0,10)$有5个交点. 当$a>1$时，$\begin{cases}\log_a 6<1\\ \log_a 10\geqslant1\end{cases}\Rightarrow 6<a\leqslant10$；



同理，当$0<a<1$时，$\log_a 8>-3$，∴$0<a<\frac{1}{2}$，

综上，实数a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(6,10]$.

8. A 如图，连接D_1A，AC，D_1C，

因为E，F，G分别为AB，BC，C_1D_1的中点，

所以$AC/\!/EF$，$EF\not\subset$平面ACD_1，则$EF/\!/$平面ACD_1，

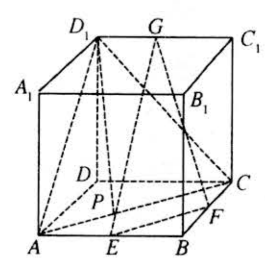
因为$EG/\!/AD_1$，所以同理得$EG/\!/$平面ACD_1，

又$EF\cap EG=E$，得平面$ACD_1/\!/$平面EFG，

因为直线$D_1P/\!/$平面EFG，

所以点P在直线AC上，在$\triangle ACD_1$中，

有$AD_1=\sqrt{2}$，$AC=2$，$CD_1=2$，



所以 $S_{\triangle AD_1C}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,

故当 $D_1P\perp AC$ 时,线段 D_1P 的长度最小,

有 $S_{\triangle AD_1C}=\frac{1}{2}\times AC\times D_1P\Rightarrow D_1P=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{1}{2}\times 2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

9. ACD $\bar{x}=\frac{9+7+8+8+9+6+4+5}{8}=7$,

$S^2=\frac{(9-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2+(6-7)^2+(4-7)^2+(5-7)^2}{8}=3$.

10. ABC 对于选项 A:$\because ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$(当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取"="),故选项 A 正确;对于选项 B:$\because$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leqslant a+b+a+b=2$,$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$(当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取"="),故选项 B 正确;对于选项 C:$\because$ 正实数 a,b 满足 $a+b=1$,$\therefore a-b=2a-1>-1$,$\therefore 3^{a-b}>3^{-1}=\frac{1}{3}$,故选项 C 正确;对于选项 D:$\because a+b=1$,$\therefore\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=3+\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{2}$(当且仅当 $a=\sqrt{2}b$ 时取"="),故选项 D 错误.

11. CD 由题可知:$A=2,T=\frac{4}{3}\times\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=2\pi$,

$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=1$,则 $f(x)=2\sin(x+\varphi)$,$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=2$,$\therefore\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$,

$\therefore f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$. 由 $f(x)$ 的图象关于点 $(x_0,0)$ 对称,可得 $x_0+\frac{\pi}{6}=k\pi$,$\therefore$ 当 $k=0$ 时,$|x_0|$ 取得最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

12. ABD 当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n+2}-S_{n-1}+1=3(S_{n+1}-S_n+1)$,$\therefore a_{n+2}+a_{n+1}+a_n+1=3(a_{n+1}+1)$,
整理得 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$,$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n)=2$,$\therefore\{a_{n+1}-a_n\}$ 从第二项起是等差数列. 又 $\because a_1=1,a_2=5,a_3=11$,$\therefore a_3-a_2-(a_2-a_1)=2$,$\therefore a_{n+1}-a_n=4+2(n-1)=2n+2$,当 $n\geqslant 2$,$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2(n-1)+2+2(n-2)+2+\cdots+2\times 1+2+1=2\times\frac{n-1+1}{2}(n-1)+2(n-1)+1=n^2+n-1$.

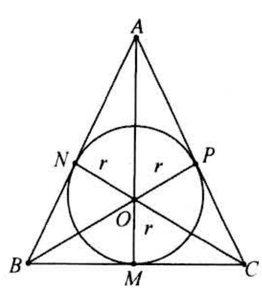
13. 6 $\because|OF|=2$,由抛物线的定义可得 $|PF|=x_P+2=8$,解得 $x_P=6$.

14. -2 由 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+3\cos\alpha}=\frac{1}{3}$ 知 $\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+3}=\frac{1}{3}$,解得 $\tan\alpha=3$,

$\therefore\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=-2$.

15. 114 当按照 3 : 1 : 1 进行分配时,有 $(C_5^3\cdot C_2^1+1)\times A_3^3=42$ 种不同的方案;当按照 2 : 2 : 1 进行分配时,有 $(C_5^1\cdot C_4^2+2\times C_5^1)\times A_3^3=72$ 种不同的方案,$\therefore$ 共有 114 种不同的方案.

16. $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 设圆锥的底面半径为 R,则高为 $2\sqrt{2}R$,$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$,$\therefore R=1$,



易知半径最大球为圆锥的内切球,球与圆锥内切时的轴截面如图所示,
其中 $BC=2,AB=AC=3$,且点 M 为 BC 边上的中点,
设内切圆的圆心为 O,

由于 $AM=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,

设内切圆半径为 r,则:

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times AB\times r+\frac{1}{2}\times BC\times r+\frac{1}{2}\times AC\times r$

$=\frac{1}{2}\times(3+3+2)\times r=2\sqrt{2}$,

解得:$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$,其体积:$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

17. 解:由正弦定理及$\frac{a}{\cos A}=\frac{b+c}{\cos B+\cos C}$,得$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$, ······ 2 分

$\therefore \sin A\cos B+\sin A\cos C=\cos A\sin B+\cos A\sin C$,

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin C\cos A-\cos C\sin A$,

$\therefore \sin(A-B)=\sin(C-A)$. ······ 4 分

$\because A,B,C\in(0,\pi)$,且 $A+B+C=\pi$

$\therefore A-B=C-A$,即 $2A=B+C$.$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ······ 5 分

$\triangle ABC$ 还同时满足条件①③④.

理由如下:

若$\triangle ABC$ 同时满足条件①②,

则由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{21}}{4}>1$, ······ 6 分

$\therefore\triangle ABC$ 不能同时满足条件①②,$\therefore\triangle ABC$ 同时满足条件③④,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times b\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$,$\therefore b=2$,与②矛盾,此时 $a^2=b^2+c^2-2bc-\cos A$,解得 $a=2\sqrt{7}$

满足①. ······ 9 分

$\therefore\triangle ABC$ 同时满足①③④. ······ 10 分

18. 解:(1)由 $a_{n+1}=2S_n+1$ 可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant 2)$,

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$,$a_{n+1}=3a_n(n\geqslant 2)$. ······ 2 分

又 $a_2=2S_1+1=3$,$\therefore a_2=3a_1$.

故$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 3 的等比数列. 所以 $a_n=3^{n-1}$. ······ 4 分

$\because b_{n+1}-b_n=2$,$\therefore$数列$\{b_n\}$是首项为 1,公差为 2 的等差数列,

$\therefore b_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$ ······ 6 分

(2)$\because c_n=\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n-1}{3^{n-1}}$,$\therefore T_n=\frac{1}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n-1}}$.

则$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-3}{3^{n-1}}+\frac{2n-1}{3^n}$, ······ 8 分

两式相减得:$\frac{2}{3}T_n=1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{2n-1}{3^n}$.

$\therefore T_n=3-\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}-\frac{2n-1}{2\cdot 3^{n-1}}=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$. ······ 12 分

19. (1)证明:连接 AC,设 $AC\cap BE=G$,连接 FG.

$\because E$ 是 AD 中点,$\therefore\frac{AG}{GC}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$. ······ 2 分

$\because SF=\frac{1}{3}SC$,即$\frac{SF}{FC}=\frac{1}{2}$,$\therefore\frac{SF}{FC}=\frac{AG}{GC}$,$\therefore FG/\!/SA$. ······ 4 分

又 $FG\subset$平面 BEF,$SA\not\subset$平面 BEF,

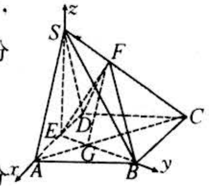
$\therefore SA/\!/$平面 BEF; ······ 5 分

(2)解:$\because SA=SD=\sqrt{2}$,$\therefore SE\perp AD$,$SE=1$.

又∵$AB=AD=2$，$\angle BAD=60°$，∴$BE=\sqrt{3}$，

∴$SE^2+BE^2=SB^2$，∴$SE\perp BE$，∵$AD\cap BE=E$，∴$SE\perp$平面$ABCD$，…………………………………… 8 分

以EA，EB，ES所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系，则$A(1,0,0)$，



$B(0,\sqrt{3},0)$，$S(0,0,1)$，$\overrightarrow{SB}=(0,\sqrt{3},-1)$ …………………………………… 9 分

设平面EFB的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EB}\Rightarrow(x,y,z)\cdot(0,\sqrt{3},0)=0\Rightarrow y=0$，

$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{GF}\Rightarrow\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AS}\Rightarrow(x,y,z)\cdot(-1,0,1)=0\Rightarrow x=z$，令$x=1$，$\boldsymbol{n}=(1,0,1)$………… 10 分

∴$\cos<\overrightarrow{SB},\boldsymbol{n}>=\dfrac{|\overrightarrow{SB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{SB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，即直线$SB$与平面$BEF$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. …………………… 12 分

20. 解：(1)$P=1-\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{23}{24}$；…………………………………… 3 分

(2)设C得到的奖金数为X，A、B两人得到的奖金数的和为ξ，

∴$\xi=3-X$，而$X=0,1,\dfrac{3}{2},3$；

X	0	1	$\frac{3}{2}$	3
ξ	3	2	$\frac{3}{2}$	0

…………………………… 4 分

$$P(\xi=3)=\frac{\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{23}{24}}=\frac{11}{23};$$

$$P(\xi=2)=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{23}{24}}=\frac{6}{23},P\left(\xi=\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}}{\frac{23}{24}}=\frac{5}{23};$$

$$P(\xi=0)=\frac{\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}}{\frac{23}{24}}=\frac{1}{23},$$

∴ξ的分布列为：

ξ	3	2	$\frac{3}{2}$	0
P	$\frac{11}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{1}{23}$

…………………………… 10 分

∴$E(\xi)=0\times\dfrac{1}{23}+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{23}+2\times\dfrac{6}{23}+3\times\dfrac{11}{23}=\dfrac{105}{46}$. …………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题意得$c=3$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴$a=2\sqrt{3}$.

又因为$a^2=b^2+c^2$，∴$b^2=3$，∴椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$；…………………………………… 4 分

(2)由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx\end{cases}$，得$(b^2+a^2k^2)x^2-a^2b^2=0$. …………………………………… 5 分

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，∴$x_1+x_2=0$，$x_1x_2=\dfrac{-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$，

依题意，$OM\perp ON$，易知，四边形OMF_2N为平行四边形，∴$AF_2\perp BF_2$. …………………………… 7 分

∵$\overrightarrow{F_2A}=(x_1-3,y_1)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_2-3,y_2)$，

$\therefore \overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=(x_1-3)(x_2-3)+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+9=0.$

即$\dfrac{-a^2(a^2-9)(1+k^2)}{a^2k^2+(a^2-9)}+9=0$,将其整理为$k^2=\dfrac{a^4-18a^2+81}{-a^4+18a^2}=-1-\dfrac{81}{a^4-18a^2}$. ………………………… 9 分

$\because \dfrac{\sqrt{10}}{4}\leqslant e<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,$\therefore \dfrac{27}{2}<a^2\leqslant\dfrac{72}{5}$.

$\therefore \dfrac{1}{3}<k^2\leqslant\dfrac{9}{16}$,即$-\dfrac{3}{4}\leqslant k<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<k\leqslant\dfrac{3}{4}$. ……………………………………… 12 分

22. 解:(1)$a=1$,$f(x)=x\cos x-\sin x$,$f'(x)=-x\sin x$.

令$f'(x)\geqslant0$,则$x\in[\pi,\dfrac{3\pi}{2}]$;令$f'(x)\leqslant0$,则$x\in[\dfrac{\pi}{6},\pi]$,

$\therefore$函数$f(x)$在$[\dfrac{\pi}{6},\pi]$上单调递减,在$[\pi,\dfrac{3\pi}{2}]$上单调递增. ………………………………………… 2 分

又$f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}\pi-6}{12}$,$f(\pi)=-\pi$,$f(\dfrac{3\pi}{2})=1$,

$\therefore$函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2}\right]$上的最大值为1,最小值为$-\pi$; …………………………………… 4 分

(2)令$g(x)=x-f(x)=x+\sin x-ax\cos x$,$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,则$g(x)\geqslant0$恒成立,

当$a\leqslant0$时,显然$x+\sin x\geqslant0$,$-ax\cos x\geqslant0$,即$g(x)\geqslant0$,符合题意; …………………………………… 6 分

当$a>0$时,$g'(x)=1+(1-a)\cos x+ax\sin x$,

若$0<a\leqslant1$,则$1-a\geqslant0$,显然$g'(x)>0$,即$g(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增,则$g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意; …

………………………………………………………………………………………… 7 分

若$a>1$,令$h(x)=g'(x)=1+(1-a)\cos x+ax\sin x$,则$h'(x)=(2a-1)\sin x+ax\cos x$,

因为$2a-1>0$,$a>0$,所以$h'(x)\geqslant0$,即$g'(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增,则$2-a=g'(0)\leqslant g'(x)\leqslant g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\dfrac{\pi}{2}a$, ……………………………………………………………………………… 9 分

若$1<a\leqslant2$,则$g'(x)\geqslant2-a\geqslant0$,即$g(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增,$g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意; ……… 10 分

若$a>2$,则$2-a<0$,则存在$x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,使得$g'(x_0)=0$,

则$x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,此时$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,从而$g(x)<g(0)=0$,不能使得$g(x)\geqslant0$恒成立.

综上所述,实数a的取值范围是$a\leqslant2$. ……………………………………………………………… 12 分