

2021-2022 学年度镇江市高三期中试卷

数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | 2^x > 3\}$, $B = \{x | x < 5, x \in N\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

2. 命题 “ $\forall x \geq 0$, $\tan x \geq \sin x$ ” 的否定为 ()

- A. $\exists x_0 \geq 0, \tan x_0 < \sin x_0$ B. $\exists x_0 < 0, \tan x_0 < \sin x_0$
C. $\forall x \geq 0, \tan x < \sin x$ D. $\forall x < 0, \tan x < \sin x$

3. 已知复数 $z = \frac{i^3}{1-i}$ (i 是虚数单位), 则复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 已知函数 $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x + e^{-x}$ (e 为自然对数的底数), 则图像为如图的函数可能是

- A. $y = f(x) + g(x)$ B. $y = f(x) - g(x)$ C. $y = f(x)g(x)$ D. $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

5. 已知角 α 的终边过点 $P(4, m)(m \neq 0)$, 且 $\sin \alpha = \frac{m}{5}$, 则 $\cos \alpha$ 的值为 ()

- A. $\pm \frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\pm \frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

6. 我国东汉数学家赵爽在《周髀算经》中利用一副“弦图”给出了勾股定理的证明, 后人称其为“赵爽弦图”, 它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形, 如图所示, 在“赵爽弦图”中, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$, 则 $\overrightarrow{EF} = (\quad)$

- A. $\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$ B. $\frac{3}{25}\vec{a} + \frac{4}{25}\vec{b}$ C. $\frac{4}{25}\vec{a} + \frac{3}{25}\vec{b}$ D. $\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{10} = 1$, $S_{30} = 13$, 则 $S_{40} =$ ()

- A. -51 B. -20 C. 27 D. 40

8. 已知 $a = 2^{\sqrt{3}}$, $b = \frac{5}{2}$, $c = \log_2 5$, $d = 2\sqrt{2}$, 则下列大小关系正确的为 ()

- A. $c > a > d > b$ B. $a > c > d > b$ C. $a > d > c > b$ D. $a > d > b > c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 若 $a > b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则下列不等式恒成立的是 ()

- A. $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$ B. $a^2 + b^2 > 1$ C. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 1$ D. $a - \sqrt{a} > b - \sqrt{b}$

10. 明代数学家程大位在《算法统宗》中编织了一个“九儿问甲歇”问题：一个公公九个儿，若问生年总不知；自长排来差三岁，共年二百又零七；借问长儿多少岁？各儿岁数要详推. 如果按儿子的岁数从大到小排列，假设公公 20 岁时生第一个儿子，则 ()

- A. 第五个儿子岁数是 23 岁 B. 最大儿子岁数为 38 岁
C. 最小儿子岁数是 11 岁 D. 生最小儿子时，公公是 44 岁

11. 已知向量 $\vec{a} = (4, 3 - m)$, $\vec{b} = (1, m)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m = 4$ B. 若 $m = \frac{3}{5}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
C. $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ 的最小值为 6 D. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角, 则 $-1 < m < 4$

12. 已知函数 $f(x) = |\sin x| + \sqrt{3}|\cos x|$, 下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
B. $f(x)$ 为偶函数
C. 函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
D. 函数 $y = f(x)$ 的最小值为 1

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ |x-1|, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若 $f(a) = 2$ ，则实数 a 的值为_____.

14. 已知非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 不共线，若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ ， $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ ， $\overrightarrow{CD} = 2\vec{a} - k\vec{b}$ ，且 A ， C ， D 三点共线，则 $k =$ _____.

15. 已知 $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$ _____.

16. 某校在研究民间剪纸艺术时，经常会沿着纸的某条对称轴把纸对折，规格为 $12dm \times 20dm$ 的长方形纸，对折一次可以得到 $10dm \times 12dm$ 和 $6dm \times 20dm$ 两种规格的图形，他们的周长之和为 $C_1 = 96dm$ ，对折二次可以得到 $5dm \times 12dm$ ， $6dm \times 10dm$ ， $3dm \times 20dm$ 三种规格的图形，他们的周长之和为 $C_2 = 112dm$ ，以此类推，则折叠 5 次后能得到的所有不同图形的周长和 C_5 为_____，如果对折 n 次后，能得到的所有图形的周长和记为 C_n ，则 $C_n =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x) = ax^2 + bx - 3$ ($a, b \in R, a \neq 0$)，关于 x 的不等式 $f(x) < k$ (k 为常数) 的解集为 $(-3, 1)$.

(1) 若 $k = 0$ ，求实数 a ， b 的值；

(2) 当 $x \in [1, 3]$ 时， $f(x) < x - 2$ 恒成立，试求 a 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知在各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_3 + a_4 = 21$, 且 $a_2 - 1$, $a_3 + 1$, $a_4 + a_3$ 构成等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\} = \underline{\hspace{2cm}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

请在① $a_n b_n$; ② $\frac{b_n}{(b_n - 1)(b_{n+1} - 1)}$; ③ $(-1)^n a_n + n$ 这三个条件中选择一个, 补充在上面的横线上, 并完成解答.

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a , b , c 分别为角 A , B , C 的对边, 已知 $b = 2$, $c = 4$, $2c \cos C - c \cos A = a \cos C$, 点 D 为线段 BC 上的点, 点 E 为线段 AB 上的点, 记 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的面积分别为 S_1 , S_2 .

(1) 若 $S_1 = S_2$, 求 AD 的长;

(2) 若 $S_1 = 2S_2$, 且 $\angle AED = \frac{3\pi}{4}$, 求 ED 的长.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 3^x + m \cdot 3^{-x}$ 为偶函数 ($m \in R$).

- (1) 求 m 的值;
- (2) 判断函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的单调性, 并证明你的结论;
- (3) 若函数 $g(x) = f(2x) - 2tf(x) + 18$ 有四个不同的零点, 求 t 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

数学中处处存在着美, 机械学家莱洛发现的莱洛三角形就给人以对称的美感. 莱洛三角形的画法: 先画等边三角形 ABC , 再分别以点 A, B, C 为圆心, 线段 AB 长为半径画圆弧, 便得到莱洛三角形. 如图所示, 已知 $AB = 2$, O 为 BC 中点, 点 P, Q 分别在弧 AC , 弧 AB 上, 设 $\angle PBC = \angle ACQ = \theta$.

- (1) 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 求 $|\overrightarrow{PQ}|$;
- (2) 求 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = kx^2 - 2x (k \in R)$.

(1) 若 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线也是 $y = g(x)$ 的切线, 求 k 的值;

(2) 若 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求 k 的最小整数值.