江苏省仪征中学 2019 届高三上学期数学(文)周末限时训练 3（2018.9.22）

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数、解析几何、不等式

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分.

1、已知全集 U＝R，集合 A={x|x＋3≤0}，B={x|x－5＜0}，那么集合 $(\complement_U A)\cap B$ 等于________.

2、命题：“$\exists x>0$，使得 x^2－2＜0”的否定形式为______________________.

3、已知 i 是虚数单位，计算 $\dfrac{(2+\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}$ 的结果是__________.

4、命题“$x=\pi$”是“$\sin x=0$”的__________条件．（填“充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”）

5、已知圆心在 x 轴上，半径为$\sqrt{2}$的圆 C 位于 y 轴的右侧，且与直线 x＋y＝0 相切，则圆 C 的标准方程为__________________.

6、已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le 1\\ bx-2a, & x>1\end{cases}$,其中 a,b 是常数,若对 $\forall x\in R,$ 都有 $f(1-x)=f(1+x)$,则 $a+b=$__________.

7、已知$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为 60°，$|\overrightarrow{OA}|$＝2，$|\overrightarrow{OB}|$＝$2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OP}$＝$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，若 $\lambda+\sqrt{3}\mu=2$，则$|\overrightarrow{OP}|$的最小值为________.

8、若函数 y＝x^3－3ax＋a 在(1,2)内有极小值，则实数 a 的取值范围是________.

9、从原点 O 向圆 C：$x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线，则该圆被两切点所分成的劣弧与优弧长之比为________.

10、已知 x＞0，y＞0，$\lg 2^x+\lg 8^y=\lg 2$，则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}$的最小值是________.

11、已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴的两个端点分别为 A，B，点 C 为椭圆上异于 A，B 的一点，直线 AC 与直线 BC 的斜率之积为$-\dfrac{1}{4}$，则椭圆的离心率为________.

12、已知$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2},\cos\alpha+\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$则$\cos(2\alpha-2\beta)=$__________.

13、已知 O 为△ABC 的垂心，且$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 A 角的值为__________.

14、已知 $f(x)$是定义域为（0，+∞）的单调函数，若对任意的 x∈（0，+∞），都有$f[f(x)+\log_{\frac{1}{3}}x]=4$，且关于 x 的方程$|f(x)-3|=x^3-6x^2+9x-4+a$在区间（0，3]上有两解，则实数 a 的取值范围是________.

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{2},(x\in R)$.

（1）求 $f(x)$的最小正周期;

（2）求 $f(x)$的单调递增区间;

（3）求 $f(x)$图象的对称轴方程和对称中心的坐标.

16、(本小题满分 14 分) 在锐角△ABC 中，a、b、c分别为角 A、B、C所对的边，

且$\sqrt{3}a=2c\sin A$.

(1)求角C的大小;

(2)若 c＝$\sqrt{7}$，且△ABC 的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $a+b$ 的值.

17、（本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+a\ln(1-x)(a\in R)$ 的图象关于原点对称.

（1）求定义域；

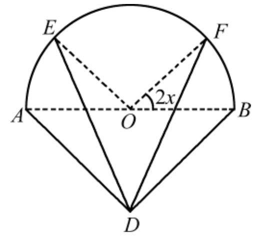
（2）求 a 的值；

（3）若 $g(x)=e^{f(x)}-\dfrac{1-m}{2+m}$ 有零点，求 m 的取值范围.

18、(本小题满分 16 分) 某广告公司为在我市枣林湾举办的江苏省第十届园艺博览会设计了一种霓虹灯，样式如图中实线部分所示．其上部分是以 AB 为直径的半圆，点 O 为圆心，下部分是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，DE、DF 是两根支杆，其中 $AB＝2m$，$\angle EOA＝\angle FOB＝2x(0＜x＜\dfrac{\pi}{4})$．现在弧 EF、线段 DE 与线段 DF 上装彩灯，在弧 AE、弧 BF、线段 AD 与线段 BD 上装节能灯．若每种灯的“心悦效果”均与相应的线段或弧的长度成正比，且彩灯的比例系数为 $2k$，节能灯的比例系数为 $k(k＞0)$，假定该霓虹灯整体的“心悦效果” y 是所有灯“心悦效果”的和．

(1) 试将 y 表示为 x 的函数；

(2) 试确定当 x 取何值时，该霓虹灯整体的“心悦效果”最佳？

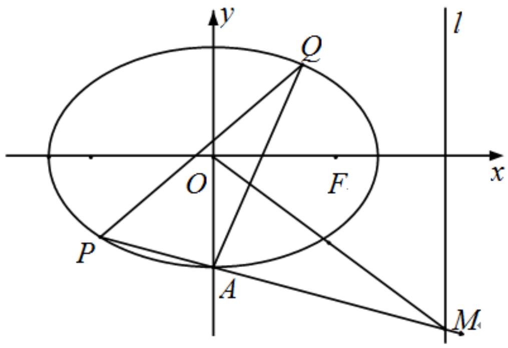


19、(本小题满分 16 分) 如图，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$，右准线 $l:x=2$，设 O 为坐标原点，若不与坐标轴垂直的直线与椭圆 E 交于不同两点 P,Q（均异于点 A），直线 AP 交 l 于 M（点 M 在 x 轴下方）.

（1）求椭圆 E 的标准方程;

（2）过右焦点 F 作 OM 的垂线与以 OM 为直径的圆 H 交于 C,D 两点，若 $CD=\sqrt{6}$，求圆 H 的方程;

（3）若直线 AP 与 AQ 的斜率之和为 2，证明：直线 PQ 过定点，并求出该定点.



20、(本小题满分 16 分) 已知函数 $f(x)=a(2-x)\mathrm{e}^x$，$g(x)=(x-1)^2$.

(1)若曲线 $y=g(x)$ 的一条切线经过点 $M(0,-3)$，求这条切线的方程.

(2)若关于的方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实数根 x_1，x_2.

①求实数 a 的取值范围;

②证明：$x_1+x_2<2$.

江苏省仪征中学 2018 届高三上学期数学(文)周末限时训练 3 答案

1、$\{x|-3<x<5\}$； 2、$\forall x>0$，都有 $x^2-2\geq 0$； 3、$-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$； 4、充分不必要；

5、$(x-2)^2+y^2=2$； 6、$-\frac{10}{3}$； 7、$2\sqrt{3}$； 8、$(1,4)$； 9、$\frac{1}{2}$； 10、4；

11、$\frac{\sqrt{3}}{2}$； 12、$-\frac{7}{32}$； 13、$\frac{\pi}{4}$； 14、（0，5].

15、解: $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\frac{\cos 2x+1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},(x\in R)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

……………………………………………………………………………………4 分

（1）$T=\pi$； ……………………………………………………………………6 分

（2）由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in z)$， ……………………………………8 分

可得 $f(x)$ 单调增区间 $[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5}{12}\pi]$（$k\in z$）. ……………………………10 分

（3）由 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 得对称轴方程为 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in z)$， ……………………12 分

由 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$ 得对称中心坐标为 $(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0)(k\in z)$. 14 分

16、解（1）由 $\sqrt{3}a=2c\sin A$ 及正弦定理得，$\frac{a}{c}=\frac{2\sin A}{\sqrt{3}}=\frac{\sin A}{\sin C}$， …………………2 分

$\because\sin A\neq 0,\therefore\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………………………………………………4 分

$\because\Delta ABC$ 是锐角三角形，$0<C<\frac{\pi}{2}$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………7 分

（2）解法 1：$\because c=\sqrt{7},C=\frac{\pi}{3}$.由面积公式得，

$\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,即$ab=6$ ①

由余弦定理得 $a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=7$,即$a^2+b^2-ab=7$ ② ………………11 分

由②变形得 $(a+b)^2=25$,故$a+b=5$.………………14 分

17、 解:(1)函数 $f(x)=ln(x+1)+aln(1-x)$ 有意义,

必有: $\begin{cases} x+1>0 \\ 1-x>0 \end{cases}$,解得 $x\in(-1,1)$

函数的定义域为: $(-1,1)$ . . . (3分)

(2)函数 $f(x)=ln(x+1)+aln(1-x)(a\in R)$ 的图象关于原点对称,函数是奇函数,

函数的定义域为: $(-1,1)$,

所以 $f(x)=-f(-x)$,即 $ln(x+1)+aln(1-x)=-ln(-x+1)-aln(1+x)$

$\therefore a=-1$ $\cdots$ (8分)

(3) $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ ，

由题意： $e^{f(x)}-\dfrac{1-m}{2+m}=0,$ 在 $x\in(-1,1)$ 上有解，即： $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1-m}{2+m},3x=-2m-1,$

$\therefore x=-\dfrac{2}{3}m-\dfrac{1}{3}\in(-1,1),-1<-\dfrac{2}{3}m-\dfrac{1}{3}<1,\therefore -2<m<1,$

$\therefore m\in(-2,1)$ ··14 分

18、解：(1)∵∠EOA=∠FOB=2x，

∴弧 EF、AE、BF 的长分别为 π-4x，2x，2x.

连接 OD，则由 OD=OE=OF=1，得 $\angle FOD=\angle EOD=2x+\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore DE=DF=\sqrt{1+1-2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2+2\sin 2x}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$,

$\therefore y=2k(2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\pi-4x)+k(2\sqrt{2}+4x)$

$=2k(2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2x+\sqrt{2}+\pi)$.

(2)由 $y'=4k(\sqrt{2}(\cos x-\sin x)-1)=0$，得 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$， 即 $x=\dfrac{\pi}{12}$.

又当 $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{12}\right)$时，y'>0，此时 y 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{12}\right)$上单调递增;

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$时，y'<0，此时 y 在$\left(\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$上单调递减.

故当 $x=\dfrac{\pi}{12}$时，该霓虹灯整体的“心悦效果”最佳.

19、解：（1）由 $\begin{cases} b=1 \\ \dfrac{a^2}{c}=2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$ ，解得 $a=\sqrt{2},b=1$. 所以椭圆 E 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）设 $M(2,m)$ ，由 $CD\perp OM$ 得 $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{OM}}=-\dfrac{2}{m}$ ，

则 CD 方程为 $y=-\dfrac{2}{m}(x-1)$ ，即 $2x+my-2=0$.

因为圆心 $H(1,\dfrac{m}{2})$ ，则圆心 H 到直线 CD 的距离为 $d=\dfrac{|2+\dfrac{m^2}{2}-2|}{\sqrt{4+m^2}}=\dfrac{m^2}{2\sqrt{4+m^2}}$.

圆半径为$r=\dfrac{OM}{2}=\dfrac{\sqrt{4+m^2}}{2}$，且$\dfrac{CD}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，由$d^2+(\dfrac{CD}{2})^2=r^2$，代入得$m=\pm 2$.

因为点M在x轴下方，所以$m=-2$，此时圆H方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

（3）设PQ方程为：$y=kx+b(b\neq -1)$，$A(0,-1)$，令$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

由直线AP与AQ的斜率之和为2得$\dfrac{y_1+1}{x_1}+\dfrac{y_2+1}{x_2}=2$，

由$y_1=kx_1+b,y_2=kx_2+b$得$2k+\dfrac{(b+1)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2$，　①

联立方程$\begin{cases} y=kx+b \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，得$(1+2k^2)x^2+4kbx+2b^2-2=0$，

所以$x_1+x_2=\dfrac{-4kb}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2b^2-2}{1+2k^2}$代入①得，$(b+1)(b+k-1)=0$，

由$b\neq -1$得$b+k-1=0$，即$b=1-k$，

所以PQ方程为$y=kx+1-k=k(x-1)+1$，所以直线PQ过定点，定点为$(1,1)$.

20、解:(1)解法一　设经过点$M(0,-3)$的切线与曲线$y=g(x)$相切于点$Q(t,\ (t-1)^2)$，

由$g(x)=(x-1)^2$得$g'(x)=2(x-1)$，

所以该切线方程为$y-(t-1)^2=2(t-1)(x-t)$，　……………………（2 分）

因为该切线经过$M(0,-3)$，所以$-3-(t-1)^2=2(t-1)(-t)$，解得$t=\pm 2$，

所以切线方程为$2x-y-3=0$或$6x+y+3=0$.　……………………（3 分）

解法二　由题意得曲线$y=g(x)$的切线的斜率一定存在，设所求的切线方程为$y=kx-3$，

由$\begin{cases} y=kx-3 \\ y=(x-1)^2 \end{cases}$，得$x^2-(2+k)x+4=0$，　……………………（2 分）

因为切线与抛物线相切，所以△=$(2+k)2-16=0$，解得$k=2,-6$，

所以所求的切线方程为$2x-y-3=0$或$6x+y+3=0$.　……………………　（4 分）

（2）①由$f(x)=g(x)$，得$g(x)-f(x)=0$.

设$h(x)=g(x)-f(x)=a(x-2)e^x+(x-1)^2$，

则$h'(x)=a(x-1)\mathrm{e}^x+2(x-1)=(x-1)(a\mathrm{e}^x+2)$，

由题意得函数$h(x)$恰好有两个零点.　……………………　（5 分）

（i）当$a=0$，则$h(x)=(x-1)^2$，

$h(x)$只有一个零点 1.　……………………（6 分）

（ii）当$a>0$时，由$h'(x)<0$得$x<1$，由$h'(x)>0$得$x>1$，

即$h(x)$在$(-\infty,1)$上为减函数，在$(1,+\infty)$上为增函数，

而$h(1)=-ae<0,\quad h(2)=1$，

所以$h(x)$在$(1,+\infty)$上有唯一零点，且该零点在$(1,2)$上.

取$b<0$,且$b<\ln\dfrac{1}{2a}$，则$h(b)>\dfrac{1}{2}(b-2)+(b-1)^2=b(b-\dfrac{3}{2})>0$

所以$h(x)$在$(-\infty,1)$上有唯一零点，且该零点在$(b,1)$上，

所以$a>0,h(x)$恰好有两个零点.　……………………（8 分）

（iii）当$a<0$时，由$h'(x)=0$得$x=1$或$\ln(-\dfrac{2}{a})$，

若 $a=-\dfrac{2}{e}$， $h'(x)=-\dfrac{2}{e}(x-1)(e^x-e)\leqslant 0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上至多有一个零点.

若 $a<-\dfrac{2}{e}$，则 $\ln(-\dfrac{2}{a})<1$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)<0$，即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $h(1)=-ae>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上至多有一个零点.

当 $x\in(-\infty,1)$ 时， $h(x)$ 在 $(\ln(-\dfrac{2}{a}),1)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln(-\dfrac{2}{a}))$ 上为减函数，

又 $h[\ln(-\dfrac{2}{a})]=-2[\ln(-\dfrac{2}{a})-2]+[\ln(-\dfrac{2}{a})-1]^2=[\ln(-\dfrac{2}{a})-2]^2+1>0$，

所以 h(x)在 $(-\infty,\ln(-\dfrac{2}{a}))$ 上无零点. …………………… （10 分）

若 $a>-\dfrac{2}{e}$，则 $\ln(-\dfrac{2}{a})>1$，又当 $x\leq 1$ 时， $h(x)\geqslant h(1)=-ae>0$，

所以 $h(x)$ 不存在零点． $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上无零点

故当 $x\in(1,\ln(-\dfrac{2}{a}))$ 时， $h(x)>0$；当 $x\in(\ln(-\dfrac{2}{a}),+\infty)$ 时， $h'(x)>0$.

因此 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-\dfrac{2}{a}))$ 上单调递增，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递减.

又 $h[\ln(-\dfrac{2}{a})]=-2[\ln(-\dfrac{2}{a})-2]+[\ln(-\dfrac{2}{a})-1]^2=[\ln(-\dfrac{2}{a})-2]^2+1>0$。

所以 $h(x)$ 在 $(1,\ln(-\dfrac{2}{a}))$ 无零点，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 至多有一个零点. ………………（11 分）

综上，的取值范围为 $(0,+\infty)$. …………………… （12 分）

②不妨设 $x_1<x_2$，

由①知 $x_1\in(-\infty,1),x_2\in(1,+\infty)$， $2-x_2\in(-\infty,1)$，且 $a>0$， $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，

所以 $x_1+x_2<2$ 等价于 $h(x_1)>h(2-x_2)$，即 $h(2-x_2)<0$.

由于 $h(2-x_2)=-ax_2e^{2-x_2}+(x_2-1)^2$，

且 $h(x_2)=a(x_2-2)e^{x_2}+(x_2-1)^2=0$，所以

$$\begin{aligned}h(2-x_2)&=a[-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}]\\&=-a[x_2e^{2-x_2}+(x_2-2)e^{x_2}]\end{aligned}.$$ …………………… （14 分）

设 $\varphi(x)=xe^{2-x}+(x-2)e^x$,其中$x>1$.，则 $\varphi'(x)=(x-1)(e^x-e^{2-x})$，

当 $x>1$ 时， $e^x>e,e^{2-x}<e$，所以 $\varphi'(x)>0$.而 $\varphi(1)=0$，故当 $x>1$ 时， $\varphi(x)>0$.

从而 $f(2-x_2)=-a\varphi(x_2)<0$，故 $x_1+x_2<2$. …………………… （16 分）