

沉浸在数学的乐趣之中

北京大学关启安教授因“多复变中的强开性猜想和相关问题的解决”获得了2020年度陈嘉庚青年科学奖数理科学奖。本刊为此对关启安教授进行了专访，请他谈谈数学研究的体验和感悟，以及对大学数学学习的建议。

记者 / 方晨

对数学的兴趣

您是在什么时候对数学产生兴趣的？

关启安：这个很难说。我中学时比较喜欢做数学题。初等数学知识量小，逻辑清晰，不需要太多公理，能比较简单地说明问题，还有很多解题技巧，比较有趣。

我真正接触到数学研究工作是跟周向宇老师开始的。从进入中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所读研究生开始，我就在讨论班上聆听周老师的教导。周老师在讨论班上强调，研究要勤于思考、多动脑筋，对于一个定理不光要知道内容、会证明，还要思考条件是否必要、证明是否可以简化、结论是否可以改进、有没有相应的例子等等。从那时我开始走上科研道路。

我很认同周老师所说的：当你解决一个又一个有趣的数学问题并发现其中奥妙时，你便有一种愉快的感受，从而更激发对数学的兴趣。

数学讨论班是什么样的形式？

关启安：讨论班是一种非常好的提升理解的方式。人总有一些惰性，自己看书的时候，有些东西看一下就过去了，到底有没有看懂其实自己并不清楚，所以需要讲一遍。能讲清楚，说明是真的掌握了。讨论班就提供了一个讲的环境，学生轮流讲，老师在下面点评。

在讨论班上，你得把最复杂、最难的部分讲清楚。老师起着主导作用，学生实在搞不明白时，老师就来讲，给以启发，激励思考。

“出乎意料”的方法

《数学年刊》评审人评价您的工作是“用一种出乎意料而巧妙的方法解决了一个重要问题”。您的获奖研究，解决了什么样的问题？

关启安：我们获奖的研究是“多复变中的强开性猜想和相关问题的解决”。我与周老师合作发展了 L^2 方法，解决了具最优估计的 L^2 延拓问题，建立了具最优估计的 L^2 延拓定理，以及发现其与许多不同问题的联系并予以解决，打破了以往仅与一个问题有联系的局限；解决了法国科学院院士让-皮埃尔·德马依(Jean-Pierre Demailly)提出的、“被认为是相当不可及的”关于乘子理想层的强开性猜想——这是多复变与复几何发展的一个瓶颈问题，不少数学家在假定该猜想成立下得到一些重要结果。《数学评论》(Mathematical Reviews)评价这个工作是“近年来复分析与代数几何相交领域最重大的成就之一”。

解决这个问题的过程有多长？中间有没有感觉很困难的时候？

关启安：时间其实并不是很漫长。就是在博士后出站之前，当时我有时间，周老师也比较有时间，我们就开始研究这个问题。我们天天长时间讨论交流，节假日也不例外，可以说到了废寝忘食的程度。

这是一个已经存在了很久的数学问题，做多复变的数学家都知道这个问题。它的陈述不是很复杂：就是一个可积函数，在一个开性扰动下仍可积吗？解决这个问题，确实费了一些



关启安

2011年博士毕业于中国科学院数学与系统科学研究院，师从周向宇院士。毕业之后在北京国际数学研究中心作两年博士后研究，合作导师为刘小博教授。2013年入职北京大学数学科学学院，现任教授。曾获得霍英东教育基金会“青年教师奖”，教育部“长江学者奖励计划——青年学者”和“高等学校科学研究优秀成果奖——青年科学奖”，香港求是科技基金会“求是杰出青年学者奖”，中国科协“中国青年科技奖——特别奖”等。

功夫，但由于有与周老师的合作，我印象里似乎也没有那种特别困难的情况。

周老师在讨论班上经常提到数学研究是很耗神的。我的理解是，好的结果要在长时间的反复思考中才可能得到，这应该就是数学研究的困难所在。我的办法就是经常调整自己的思路：多向周老师请教，多和同行讨论，多听学术报告。如果有机会的话，就报告一些内容。

您的方法被评审人认为是“出乎意料”，是不是来自于什么灵感？

关启安：我有时候也在想，是否能够用类似的“感觉”再做点别的东

西。但是后来发现，其实不是那么回事儿。我与周老师合作，发现了与众不同的思想与方法，我觉得这也和所受教育打下的基础有关。

我念书的时候，分析学（如微积分等）的内容占很大比重，解决那个问题时，用的是分析的方法。

您做数学研究，一般是在纸上演算吗？

关启安：我有时要在纸上写一写，但其实大多数时候是在脑子里想。有的东西太复杂，不好写，而脑子里的空间是比较大的（笑）。这跟记忆力没有太大关系，一个问题思考了好多年，能记不住吗？

做数学研究，经常要熬夜。思维有时候不能打断，比如我想到某个地方，

就要把它完成，否则就是想睡也根本睡不着。但是想完了，可能天已经亮了。日夜颠倒，对科研来说是很正常的事。

大学数学的教与学

您是从什么时候开始给大学生开数学课的？

关启安：我2013年到北大入职之后就开始教课了。教高数（高等数学），中间还教了一年半的数学分析。不同的课程轮换着教。高数和数学分析的主要内容差不多，都是微积分，但是侧重点不一样。高数的重点是计算，也就是用积分公式、微分公式来计算；数学分析主要是证明，也就是推导这些公式。

高中和大学的数学学习，主要的差别是什么？

关启安：差别很大。中学数学概念相对较少，主要是通过例题来应用。大学的高数，涉及的概念比中学数学要多得多。

上中学的时候，基本上每学一个概念（定义），会有很多相关的例子、推论帮助你来理解。把这些例子、定理都算过之后，对这个定义自然就熟悉了。在中学时，可能不怎么看教材问题也不大，因为定义看一眼基本上就能记住，所以直接找习题集来做就可以。

高数学习就不一样了，定义特别多。但一个定义后面可能就只有有一个定理来解释，或是一个命题就只给出一个例子介绍一下，要理解这么多概念就没有那么容易了。刚学高数的时候，会觉得概念很多，还没怎么做题练习就过去了。到了后来，概念和解题技巧都越来越多。

怎样才能适应大学的这种变化？

关启安：有人也许在中学时不怎么习惯看教材，但到了大学就要反复不断地看书了，这样才能慢慢理解、熟悉那么多概念。数学的新概念层出不穷，有些概念就是遍看不懂，那就再看，反复看。熟能生巧，一个新



2015年，在北京国际数学研究中心成立十周年庆祝会作报告。

概念，你反复琢磨了很长时间之后，理解就和刚看到的时候不一样了。

您刚开始教大学数学的时候，和现在有什么不一样吗？

关启安：我每天都在思考数学问题，上课时就会产生错觉，觉得很多基本的东西学生应该知道。实际上不是这样的。不同学生，比如文科生和理科生的基础不同，要根据学生的实际程度来讲课。我后来上课就比较注意这一点，经常要问一下同学们对我讲的东西有什么想法，如果觉得很难理解，我就当场计算、推导一遍。

我感觉现在的学生的基础比我们当年要好，各个学校本科的教学内容在逐渐提升。发展的形势还是不错的。

对有志于从事数学研究的年轻人，您有什么建议与他们分享？

关启安：我想以华罗庚先生的话与他们分享。华先生说过：搞科学极重要的是独立思考，在历史上，重大的发明没有一个是不要通过独立思考就能搞出来的。独立思考不是说不要攻书，不要看文献，不要听老师的讲述。书本、文献、老师，都是需要的，但如果拘泥于这些，就会失去创造力。只有独立思考才能创造出新的方法，创造出新的领域，推动科学的进步。

非常感谢您！

多复变

关启安教授和周向宇院士研究的是数学中的多复变领域。顾名思义，“复”即复数，“变”即变量，“复变”指“变量在复数域取值、变化”，以别于“实变”；“多”指“多个”。简言之，多复变研究“复流形（复空间）及其间的全纯映照”。著名的数学学派布尔巴基（Bourbaki）学派认为，多复变是所有数学学科当中最深刻、最困难的理论之一。

根据周院士的介绍，多复变与分析、偏微分方程、泛函分析有天然联系，又由于多复变与复几何中丰富的代数结构，它与代数、李理论、群表示论等有着千丝万缕的联系。另外它还与数学物理及理论物理有着不可忽视的联系。总之，多复变与复几何是一门交叉性极强的领域，反映了数学的统一性，是现代数学的核心与前沿之一。

我国多复变研究起始于华罗庚关于典型域方面的工作。他的名著《多复变函数论中的典型域的调和分析》曾获首届国家自然科学奖一等奖。华罗庚还在多复变方向培养了杰出的学生，如陆启铿院士、龚升教授、钟家庆教授等。他们还培养了一大批学生，如今都活跃在中国数学界，成为推动我国多复变发展的中坚力量，其中不少工作在国际多复变界也很有分量。

Electronic Journal of Chinese Academic Journal Electronic Journal of Chinese Academic Journal