

第3节 导数的综合应用

微课一 构造函数证明不等式

◆ 题型分类突破

题型一 移项构造函数证明不等式

【例1】已知函数 $f(x)=x^2e^{2x-2}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2)当 $x \in [0, 2]$ 时, 求证: $f(x) \geq -2x^2 + 8x - 5$.

(1)解 $f'(x)=2e^{2x-2}(x^2+x)$, $f'(1)=4$, $f(1)=1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y-1=4(x-1)$, 即 $y=4x-3$.

(2)证明 当 $x \in [0, 2]$ 时, 令 $g(x)=x^2e^{2x-2}+2x^2-8x+5$, 则 $g'(x)=2e^{2x-2}(x^2+x)+4x-8$,

令 $h(x)=g'(x)$, 则 $h'(x)=2e^{2x-2}(2x^2+4x+1)+4>0$,

所以 $g'(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增, 且 $g'(1)=0$,

所以 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 在 $(1, 2]$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=0$, 所以 $g(x) \geq 0$,

即 $f(x) \geq -2x^2 + 8x - 5$.

感悟升华 待证不等式的两边含有同一个变量时, 一般地, 可以直接构造“左减右”或“右减左”的函数, 利用研究其单调性等相关函数性质证明不等式.

【训练1】证明: 当 $x>1$ 时, $\frac{1}{2}x^2 + \ln x < \frac{2}{3}x^3$.

证明 设 $g(x)=\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \ln x$,

则 $g'(x)=2x^2 - x - \frac{1}{x}$,

因为当 $x>1$ 时, $g'(x)=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}>0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数,

所以当 $x>1$ 时, $g(x)>g(1)=\frac{1}{6}>0$,

所以当 $x > 1$ 时, $\frac{1}{2}x^2 + \ln x < \frac{2}{3}x^3$.

题型二 放缩后构造函数证明不等式

【例 2】(2020 南京调研)已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

(1) 解 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f(x) = ae^x - \frac{1}{x}$.

由题设知, $f(2) = 0$, 所以 $a = \frac{1}{2e^2}$.

从而 $f(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \ln x - 1$, $f'(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \frac{1}{x}$.

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$.

(2) 证明 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq \frac{e^x}{e} - \ln x - 1 (x > 0)$.

设 $g(x) = \frac{e^x}{e} - \ln x - 1 (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{e^x}{e} - \frac{1}{x} (x > 0)$.

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极小值点, 也是最小值点.

故当 $x > 0$ 时, $g(x) \geq g(1) = 0$.

因此, 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

感悟升华 某些不等式, 直接构造不易求最值, 可利用条件与不等式性质, 适当放缩后, 再构造函数进行证明.

【训练 2】已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a \ln x}{x^2}$.

(1) 若 $a=1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a=0$, $x \in (0, 1)$, 证明: $x^2 - \frac{1}{x} < \frac{f(x)}{e^x}$.

(1) 解 当 $a=1$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$,

$\therefore f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{x^2 - 1 + 2 \ln x}{x^3}$

$$= \frac{(x-1)(x+1) + 2\ln x}{x^3}.$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

(2) 证明 当 $a=0$, $x \in (0, 1)$ 时, $x^2 - \frac{1}{x} < \frac{f(x)}{e^x}$ 等价于 $\frac{-\ln x}{e^x} + x^2 - \frac{1}{x} < 0$,

$\because$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $e^x \in (1, e)$, $-\ln x > 0$, $\therefore \frac{-\ln x}{e^x} < -\ln x$,

$\therefore$ 只需要证 $-\ln x + x^2 - \frac{1}{x} < 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立.

令 $g(x) = -\ln x + x^2 - \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$,

$$\therefore g'(x) = -\frac{1}{x} + 2x + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - x + 1}{x^2} > 0,$$

则函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 于是 $g(x) < -\ln 1 + 1 - 1 = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $x^2 - \frac{1}{x} < \frac{f(x)}{e^x}$.

题型三 分拆函数法证明不等式

【例 3】 (2021 百校大联考) 已知函数 $f(x) = e \ln x - ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a=e$ 时, 证明: $xf(x) - e^x + 2ex \leq 0$.

(1) 解 $f'(x) = \frac{e}{x} - a (x > 0)$,

① 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 若 $a > 0$, 则当 $0 < x < \frac{e}{a}$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x > \frac{e}{a}$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{e}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{e}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 证明 因为 $x > 0$, 所以只需证 $f(x) \leq \frac{e^x}{x} - 2e$,

当 $a=e$ 时, 由(1)知, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = -e$.

设 $g(x) = \frac{e^x}{x} - 2e (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = -e$.

综上, 当 $x > 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$, 即 $f(x) \leq \frac{e^x}{x} - 2e$.

即 $xf(x) - e^x + 2ex \leq 0$ 得证.

感悟升华 1. 若直接求导比较复杂或无从下手时, 可将待证式进行变形, 构造两个函数, 从而找到可以传递的中间量, 达到证明的目标.

2. 在证明过程中, 等价转化是关键, 此处 $g(x)_{\min} \geq f(x)_{\max}$ 恒成立, 从而 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立.

【训练 3】 已知函数 $f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x} e^{x-1}$, 证明: $f(x) > 1$.

证明 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$f(x) > 1$ 等价于 $x \ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e}$.

设函数 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x (x > 0)$,

所以当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的

最小值为 $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x) = xe^{-x} - \frac{2}{e}$, 则 $h'(x) = e^{-x}(1-x)$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$.

故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

从而 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为 $h(1) = -\frac{1}{e}$.

因为 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{e}) = h(1) = h(x)_{\max}$,

所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > h(x)$, 即 $f(x) > 1$.

拓展视野 / “双变量”问题的转化

近年高考应考，常涉及“双变量”或“双参”相关问题，能力要求高，破解问题的关键：一是转化，即由已知条件入手，寻找双变量满足的关系式，并把含双变量问题转化为含单变量的问题，二是巧妙构造函数，再借用导数，判断函数的单调性，从而求其最值.

【例1】(2021·重庆调研)已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(a-b-1)x+b+1(a, b\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=0$ ，试讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $0<a<2$ ， $b=1$ ，实数 x_1, x_2 为方程 $f(x)=m-ax^2$ 的两个不等实根，求证：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4-2a.$$

(1)解 依题意知 $x>0$ ，当 $a=0$ 时， $f(x)=\frac{1}{x}-(b+1)$ ，

①当 $b\leq-1$ 时， $f(x)>0$ 恒成立， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

②当 $b>-1$ 时， $x\in\left(0, \frac{1}{b+1}\right)$ 时， $f(x)>0$ ；

当 $x\in\left(\frac{1}{b+1}, +\infty\right)$ 时， $f(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{b+1}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{b+1}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(2)证明 由 $f(x)=m-ax^2$ 得 $\ln x+(a-2)x+2-m=0$ ，

令 $g(x)=\ln x+(a-2)x+2$ ， $x>0$ ，

则 $g(x_1)=g(x_2)=m$ ，

依题意有 $\ln x_1+(a-2)x_1=\ln x_2+(a-2)x_2$.

$$\therefore a-2=\frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1-x_2} (x_1\neq x_2, \text{ 且 } x_1, x_2>0).$$

要证 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4-2a$ ，

$$\text{只需证 } \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}>2(2-a)=\frac{-2\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_1-x_2} (*),$$

不妨设 $x_2>x_1>0$.

要证(*)式成立，只要证 $\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}<-2\ln \frac{x_2}{x_1}$ ，

即证 $2\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}<0$.

令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$, 则 $h(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}$.

$$\because h'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2<0,$$

$\therefore h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore h(t)<h(1)=0, \text{ 从而 } \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4-2a.$$

【例 2】(2020 成都调研) 已知函数 $f(x)=(x+a)e^{-x}$, 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $y=x-2$ 平行.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 如果 $0<x_1<x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 求证: $3x_1+x_2>3$.

(1) 解 由 $f(x)=(x+a)e^{-x}$, 得 $f'(x)=(1-a-x)e^{-x}$.

依题设 $f'(0)=1-a=1$, $\therefore a=0$.

(2) 证明 由 (1) 知, $f(x)=xe^{-x}$,

因为 $0<x_1<x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$,

$$\text{得 } \frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}, \text{ 所以 } x_2=x_1 e^{x_2-x_1},$$

令 $t=x_2-x_1(t>0)$, 则 $x_1e^t-x_1=t$,

$$\text{得 } x_1=\frac{t}{e^t-1}, \quad x_2=\frac{te^t}{e^t-1}.$$

$$\text{要证 } 3x_1+x_2>3, \text{ 即证 } \frac{3t}{e^t-1}+\frac{te^t}{e^t-1}>3,$$

因为 $t>0$, 所以 $e^t-1>0$, 即证 $(t-3)e^t+3t+3>0$.

设 $g(t)=(t-3)e^t+3t+3(t>0)$,

则 $g'(t)=(t-2)e^t+3(t>0)$.

令 $h(t)=(t-2)e^t+3(t>0)$,

则 $h'(t)=(t-1)e^t$,

当 $0<t<1$ 时, $h'(t)<0$, 当 $t>1$ 时, $h'(t)>0$, 所以函数 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(t)\geq h(1)=3-e>0$, 即 $g'(t)>0$,

所以 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(t) > g(0) = 0$, 所以 $3x_1 + x_2 > 3$.

思维升华 1. 由 $f(x_1) = f(x_2)$, 得 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$, 引入 $t = x_2 - x_1$, 就是根据已知条件(或极值点)之间的关系构建等式, 利用极值点之差作为变量, 从而实现消参、减元的目的.

2. 用 t 表示两个极值点的差, 进而把所求问题转化为关于 t 的函数, 借助导数求解.

◆ 题型跟踪训练

1. 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = -\frac{e}{e^x} + \frac{1}{x} + x$. 证明: 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) + g(x) \geq \frac{2}{x}$.

证明 $f(x) + g(x) \geq \frac{2}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{e}{e^x} - \frac{1}{x} + x \geq 0$.

令 $h(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{e}{e^x} - \frac{1}{x} + x (x \geq 1)$,

则 $h(1) = 0$, $h'(x) = -\frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{e}{e^x} + \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{e}{e^x} + 1$.

因为 $x \geq 1$, 所以 $h'(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{e}{e^x} + 1 > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x) \geq h(1) = 0$, 即 $1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{e}{e^x} - \frac{1}{x} + x \geq 0$.

故当 $x \geq 1$ 时, $f(x) + g(x) \geq \frac{2}{x}$.

2. (2021 武汉模拟) 设 a 为实数, 函数 $f(x) = e^x - 2x + 2a$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值;

(2) 求证: 当 $a > \ln 2 - 1$ 且 $x > 0$ 时, $e^x > x^2 - 2ax + 1$.

(1) 解 由 $f(x) = e^x - 2x + 2a$, $x \in \mathbf{R}$, 得 $f'(x) = e^x - 2$, $x \in \mathbf{R}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2$.

于是当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$2(1 - \ln 2 + a)$	

故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, \ln 2)$, 单调递增区间是 $(\ln 2, +\infty)$.

$\therefore f(x)$ 在 $x=\ln 2$ 处取得极小值, 极小值 $f(\ln 2)=2(1-\ln 2+a)$, 无极大值.

(2)证明 设 $g(x)=e^x-x^2+2ax-1$, $x\in\mathbf{R}$.

于是 $g'(x)=e^x-2x+2a$, $x\in\mathbf{R}$.

由(1)知当 $a>\ln 2-1$ 时, $g'(x)$ 的最小值为 $g'(\ln 2)=2(1-\ln 2+a)>0$.

于是对任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $g'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内单调递增.

于是当 $a>\ln 2-1$ 时, 对任意 $x\in(0, +\infty)$, 都有 $g(x)>g(0)$.

又 $g(0)=0$, 从而对任意 $x\in(0, +\infty)$, $g(x)>0$.

即 $e^x-x^2+2ax-1>0$, 故 $e^x>x^2-2ax+1$.

3.已知函数 $f(x)=(x-1)(x^2+2)e^x-2x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)证明: $f(x)>-x^2-4$.

(1)解 因为 $f'(x)=2x(x-1)e^x+x(x^2+2)e^x-2$
 $=x^2(x+2)e^x-2$, 所以 $f'(0)=-2$.

因为 $f(0)=-2$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $2x+y+2=0$.

(2)证明 要证 $f(x)>-x^2-4$,

只需证 $(x-1)(x^2+2)e^x>-x^2+2x-4$,

设 $g(x)=-x^2+2x-4=-(x-1)^2-3$,

$h(x)=(x-1)(x^2+2)e^x$,

则 $h'(x)=x^2(x+2)e^x$.

由 $h'(x)\geq 0$, 得 $x\geq -2$,

故 $h(x)$ 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递增;

由 $h'(x)<0$, 得 $x<-2$,

故 $h(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减,

所以 $h(x)_{\min}=h(-2)=-\frac{18}{e^2}$.

因为 $e\approx 2.718$, 所以 $-\frac{18}{e^2}>-3$.

又 $g(x)_{\max}=-3$, 所以 $g(x)_{\max}<h(x)_{\min}$,

从而 $(x-1)(x^2+2)e^x>-x^2+2x-4$,

即 $f(x)>-x^2-4$.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x+1} + \frac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=$

0.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: 当 $x>0$, 且 $x \neq 1$ 时, $f(x) > \frac{\ln x}{x-1}$.

$$(1) \text{解} \quad f'(x) = \frac{a \left(\frac{x+1}{x} - \ln x \right)}{(x+1)^2} - \frac{b}{x^2} (x>0).$$

由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 且过点 $(1, 1)$,

$$\text{故} \begin{cases} f(1) = 1, \\ f'(1) = -\frac{1}{2}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} b = 1, \\ \frac{a}{2} - b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

解得 $a=1, b=1$.

(2) 证明 由(1)知 $f(x) = \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{x} (x>0)$,

$$\text{所以} \quad f(x) - \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{1-x^2} \left(2 \ln x - \frac{x^2-1}{x} \right).$$

考虑函数 $h(x) = 2 \ln x - \frac{x^2-1}{x} (x>0)$,

$$\text{则} \quad h'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2x^2 - (x^2-1)}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

所以当 $x \neq 1$ 时, $h'(x) < 0$. 而 $h(1) = 0$, 故当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 可得 $\frac{1}{1-x^2} h(x)$

> 0 ;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$, 可得 $\frac{1}{1-x^2} h(x) > 0$.

从而当 $x>0$, 且 $x \neq 1$ 时, $f(x) - \frac{\ln x}{x-1} > 0$, 即 $f(x) > \frac{\ln x}{x-1}$.

5. (2020 豫北名校联考) 已知函数 $f(x) = e^{x+1} - kx - 2k$ (其中 e 是自然对数的底数, $k \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 时, 证明 $x_1 + x_2 > -2$.

(1) 解 易得 $f(x) = e^{x+1} - k$,

当 $k > 0$ 时, 令 $f(x) = 0$, 得 $x = \ln k - 1$,

可得当 $x \in (-\infty, \ln k - 1)$ 时, $f(x) < 0$,

当 $x \in (\ln k - 1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln k - 1)$ 上单调递减, 在区间 $(\ln k - 1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $k \leq 0$ 时, $f(x) = e^{x+1} - k > 0$ 恒成立, 故此时函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(2) 证明 当 $k \leq 0$ 时, 由 (1) 知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 不存在两个零点, 所以 $k > 0$,

由题意知 $e^{x_1+1} = k(x_1+2)$, $e^{x_2+1} = k(x_2+2)$,

所以 $x_1+2 > 0$, $x_2+2 > 0$, 可得 $x_1 - x_2 = \ln \frac{x_1+2}{x_2+2}$,

不妨设 $x_1 > x_2$, 令 $\frac{x_1+2}{x_2+2} = t$, 则 $t > 1$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x_1+2}{x_2+2} = t, \\ x_1 - x_2 = \ln \frac{x_1+2}{x_2+2}, \end{cases} \quad \text{解得} \quad x_1+2 = \frac{t \ln t}{t-1}, \quad x_2+2 = \frac{\ln t}{t-1},$$

所以 $x_1 + x_2 + 4 = \frac{(t+1) \ln t}{t-1}$,

欲证 $x_1 + x_2 > -2$, 只需证明 $\frac{(t+1) \ln t}{t-1} > 2$,

即证 $(t+1) \ln t - 2(t-1) > 0$,

令 $g(t) = (t+1) \ln t - 2(t-1) (t > 1)$,

则 $g'(t) = \ln t + \frac{1}{t}(t+1) - 2 = \ln t + \frac{1}{t} - 1$.

令 $h(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1 (t > 1)$,

则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} > 0$, $h(t)$ 单调递增,

所以 $g'(t) > g'(1) = 0$.

所以 $g(t)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $t > 1$ 时, $g(t) > g(1) = 0$, 即 $(t+1) \ln t - 2(t-1) > 0$,

原不等式得证.