2.2.5 简单的任意与存在

贯穿恒成立、存在问题的核心思想非常简单，即如下的知识点：

若 $f(x)\geqslant m$在定义域内恒成立等价于$f(x)_{\min}\geqslant m$

若 $f(x)\leqslant m$在定义域内恒成立等价于$f(x)_{\max}\leqslant m$

若存在 $x\in D$，使得$f(x)>m$，等价于$f(x)_{\max}>m$

若存在 $x\in D$，使得$f(x)<m$，等价于$f(x)_{\min}<m$

参分 还是 整体处理

选择 与 坚持

【典型例题】

一、简单的不等式恒成立（存在有解）问题

1. (2013 全国理 9) 若函数 $f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 是增函数，则 a 的取值范围 （ D ）

A. $[-1,0]$　　B. $[-1,+\infty)$　　C. $[0,3]$　　D. $[3,+\infty)$

解：$f'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x^2}\geqslant 0$

参分

$a\geqslant \dfrac{1}{x^2}-2x$

令 $h(x)=\dfrac{1}{x^2}-2x$ 在$x\in(\frac{1}{2},+\infty)\downarrow$

$h(x)<h(\frac{1}{2})=4-1=3$

2. 已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+10$ 在区间$[1,2]$ 上至少存在一个实数x，使得$f(x)<0$，求实数 a 的取值范围.

解：$x^3-ax^2+10<0$

$ax^2>x^3+10$

$a>x+\dfrac{10}{x^2}$

令 $h(x)=x+\dfrac{10}{x^2}$ $x\in[1,2]$

$h'(x)=1-\dfrac{20}{x^3}=\dfrac{x^3-20}{x^3}<0$

$h(x)$在$[1,2]\downarrow$，$h(x)_{\min}=h(2)=2+\frac{10}{4}=\frac{9}{2}$

$\therefore\ a>\frac{9}{2}$.

3. 设函数 $f(x)=ae^x-x^2$，若$x\in[0,+\infty)$，不等式$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数a 的取值范围.

解：$\forall x\geqslant 0$　$ae^x\geqslant x^2$

$a\geqslant \dfrac{x^2}{e^x}$

令 $h(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

$h'(x)=\dfrac{2x\cdot e^x-x^2e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{x(2-x)}{e^x}=0$

$x\in(0,2)$ $h'(x)>0$，$h(x)\uparrow$

$x\in(2,+\infty)$ $h'(x)<0$，$h(x)\downarrow$

$h(x)_{\max}=h(2)=\dfrac{4}{e^2}$

$\therefore\ a\geqslant\dfrac{4}{e^2}$.

4. (2017 新课标　文 21) 已知函数 $f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x$，若$f(x)\geqslant 0$，求a 的取值范围.

求最值

解：$f'(x)=e^x(e^x-a)+e^x\cdot e^x-a^2$

$=2e^{2x}-ae^x-a^2$　　$\begin{matrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{matrix}$

$=(e^x-a)(2e^x+a)$

1° $a=0$时　$f'(x)>0$，$f(x)=e^{2x}>0$

2° $a>0$时　$2e^x+a>0$

$x\in(-\infty,\ln a)$ $f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

$x\in(\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

$f(x)_{\min}=f(\ln a)=a(a-a)-a^2\ln a=-a^2\ln a\geqslant 0$

$\ln a\leqslant 0=\ln 1$　$\therefore\ 0<a\leqslant 1$

3° $a<0$时　$e^x-a>0$

$x\in(-\infty,\ln(-\frac{a}{2}))$，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

$x\in(\ln(-\frac{a}{2}),+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

$f(x)_{\min}=f(\ln(-\frac{a}{2}))=(-\frac{a}{2})(-\frac{3a}{2})-a^2\ln(-\frac{a}{2})$

$=\frac{3}{4}a^2-a^2\ln(-\frac{a}{2})\geqslant 0$

$\frac{3}{4}\geqslant\ln(-\frac{a}{2})$

$0<-\frac{a}{2}\leqslant e^{\frac{3}{4}}$

$0>a\geqslant -2e^{\frac{3}{4}}$

$\therefore$ 综上：$a\in[-2e^{\frac{3}{4}},1]$.

5. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-kx+1$ 在区间$(-1,+\infty)$上恒有$f(x)>0$，求k的最大整数

解: $f'(x)=\ln(x+1)+1-k=0$

$x_0=e^{k-1}-1>-1$

$x\in(-1,x_0)$ $f'(x)<0$, $f(x)\downarrow$

$x\in(x_0,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)\uparrow$

$f(x)_{min}=f(x_0)=f(e^{k-1}-1)=e^{k-1}(k-1)-k(e^{k-1}-1)+1$

$=-e^{k-1}+k+1>0$

令 $h(k)=k+1-e^{k-1}$

$h'(k)=1-e^{k-1}=0$, $k=1$

$k\geq1$时 $h'(k)\leq0$, $h(k)\downarrow$

$h(2)=3-e>0$

$h(3)=4-e^2<0$

$\therefore$ k的最大整数为2.

6. (2008 江西文 20) 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax(a>0)$. 若$f(x)>-\frac{2}{3}a$ 在$x\geqslant0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

$\Updownarrow$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax+\frac{2a}{3}>0$, $\forall x\geq0$

$\Updownarrow$

$g(x)_{min}>0$

解: $g'(x)=x^2-(a+1)x+a$

$=(x-1)(x-a)=0$

只有端点和极值点 关键点均满足即可

$x=1$ 或 $x=a$

$g(x)_{min}>0 \iff \begin{cases} g(0)=\frac{2}{3}a>0 \\ g(1)=\frac{7a}{6}-\frac{1}{6}>0 \\ g(a)=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a>0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a>0 \\ a>\frac{1}{7} \\ a<-1 \text{或} 0<a<4 \end{cases}$

得 $\frac{1}{7}<a<4$.

二、简单的组合型问题

7. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+2, g(x)=ax+\ln x$, 若存在$x_1,x_2\in(0,4]$ 使得$f(x_1)=g(x_2)$, 求 a 的取值范围.

$\Updownarrow$

$f(x)$与$g(x)$值域有交集.

解: $f(x)=(x-1)^2+1\in[1,10]$

$g(x)=ax+\ln x$

$g'(x)=a+\frac{1}{x}=\frac{ax+1}{x}$.

(1) 当$a\geq0$时 $g'(x)>0$, $g(x)$在$(0,4]\uparrow$

$g(x)\in(-\infty,4a+\ln4]$

$f(x)$, $g(x)$值域相交非空 得 $4a+\ln4\geq1$成立

$\therefore$ $a\geq0$

(2) 当$a<0$时 $g'(x)=0$, $x=-\frac{1}{a}$

(i) $-\frac{1}{a}\leq4$ 即 $a\leq-\frac{1}{4}$

$g(x)$在$(0,-\frac{1}{a}]\uparrow$, $(-\frac{1}{a},4]\downarrow$

$g(x)\in(-\infty,-1-\ln(-a)]$

$-1-\ln(-a)\geq1$

$a\geq-\frac{1}{e^2}$ 与 $a\leq-\frac{1}{4}$ 矛盾

(ii) 若 $-\frac{1}{a}>4$ 即 $-\frac{1}{4}<a<0$

$g(x)$在$(0,4]\uparrow$

$g(x)\in(-\infty,4a+\ln4]$

$4a+\ln4\geq1$

$a\geq\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln2$

$\therefore$ $\frac{1}{4}-\frac{\ln2}{2}\leq a<0$

综上 $a\in[\frac{1}{4}-\frac{\ln2}{2},+\infty)$.

8. 翻译以下条件:

(I) 对任意 $x_1\in A$, 存在$x_2\in B$, 使得$f(x_1)=g(x_2)$, 则 $f(A)\subseteq g(B)$

(II) 存在 $x_1\in A$, 存在$x_2\in B$ 使得$f(x_1)=g(x_2)$, 则 $f(A)\cap g(B)\neq\phi$

(III) 任意的 $x_1\in A$, 任意的 $x_2\in B$, 使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$, 则 $f(x)_{min}\geq g(x)_{max}$

(IV) 若存在 $x_1,x_2\in A$, 有$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant a$, 则 $f(x)_{max}-f(x)_{min}\geq a$

(V) 对任意的 $x_1\in A$, 任意的$x_2\in B$ 有$|f(x_1)-g(x_2)|\leqslant a$, 则 $\begin{cases} f(x)_{min}\geq g(x)_{max}-a \\ f(x)_{max}\leq g(x)_{min}+a \end{cases}$ $-a\leq f(x_1)-g(x_2)\leq a$

$g(x_2)-a\leq f(x_1)\leq g(x_2)+a$

(~~VI~~) 对任意的 $x_1\in A$, 任意的$x_2\in B$ 有$|f(x_1)-g(x_2)|\geqslant a$, 则 __________.

$f(x_1)-g(x_2)\geq a$ 或 $f(x_1)-g(x_2)\leq-a$

$f(x_1)\geq g(x_2)+a$ $f(x_1)\leq g(x_2)-a$

【巩固练习】

1. 已知 $f(x)=x\ln x, g(x)=-x^2+ax-3$，对一切$x\in(0,+\infty)$，都有$2f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $\underline{a\leq 4}$.

$2x\ln x \geq -x^2+ax-3$

$ax \leq x^2+2x\ln x+3$

$a \leq x+2\ln x+\frac{3}{x}$

$h(x)=x+2\ln x+\frac{3}{x}$

$h'(x)=1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2+2x-3}{x^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{x^2}$

$0<x<1$，$h'(x)<0$，$h(x)\downarrow$

$x>1$，$h'(x)>0$，$h(x)\uparrow$

$h(x)_{min}=h(1)=4$

$\therefore a\leq 4$

$\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{matrix}$

2. 函数 $f(x)=x^2-1$，对任意$x\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，$f\left(\frac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 $\underline{m\in(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty)}$.

$\frac{x^2}{m^2}-1-4m^2(x^2-1)\leq(x-1)^2-1+4m^2-4$

$(\frac{1}{m^2}-4m^2)x^2\leq x^2-2x+4m^2-4+1-4m^2=x^2-2x-3$

$\frac{1}{m^2}-4m^2\leq-\left[3(\frac{1}{x})^2+2(\frac{1}{x})-1\right]$

令$t=\frac{1}{x}\in(0,\frac{2}{3}]$　$y=3t^2+2t-1\leq\frac{5}{3}$　$\therefore\ \frac{1}{m^2}-4m^2\geq-\frac{5}{3}$

解得　$m\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $m\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. (2014 辽宁理 11)　当 $x\in[-2,1]$ 时，不等式$ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立，则实数a 的取值范围是　(C)

A. $[-5,-3]$　　B. $[-6,-\frac{9}{8}]$　　C. $[-6,-2]$　　D. $[-4,-3]$

$ax^3\geq x^2-4x-3$

$x=0$时　$0\geq-3$

$x\in(0,1]$时　$a\geq-3(\frac{1}{x})^3-4(\frac{1}{x})^2+\frac{1}{x}$　$t=\frac{1}{x}\in[1,+\infty)$

$x\in[-2,0)$时　$a\leq-3(\frac{1}{x})^3-4(\frac{1}{x})^2+(\frac{1}{x})$

$t=\frac{1}{x}\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$

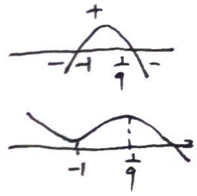
令 $h(t)=-3t^3-4t^2+t$

$h'(t)=-9t^2-8t+1$

$=(t+1)(-9t+1)=0$

$t=-1$，　$t=\frac{1}{9}$.

$\begin{matrix}1 & 1\\ -9 & 1\end{matrix}$



$h(t)$在$[1,+\infty)$上

最大值 $h(1)=-6$

$h(t)$在$(-\infty,-\frac{1}{2}]$上

最小值$h(-1)=3-4-1=-2$

4. (08 江苏第 14 题)　函数 $f(x)=ax^3-3x+1$ 对于$x\in[-1,1]$ 总有$f(x)\geqslant 0$ 成立，则实数$a=$___4___.

$f(-1)=-a+4\geq 0$

$f(1)=a-2\geq 0$　$\therefore 2\leq a\leq 4$

$f'(x)=3ax^2-3=3(ax^2-1)=0$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$

x	-1	$(\ ,\ )$	$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	$(\ ,\ )$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$(\ ,\ )$	1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$\begin{cases}f(-1)\geq 0\\ f(\frac{1}{\sqrt{a}})\geq 0\end{cases}$　$\left|\begin{matrix}a\leq 4\\ \frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{3}{\sqrt{a}}+1\geq 0\ \therefore a\geq 4\end{matrix}\right.$

$\therefore a=4$.

5. (2008 天津文 10)　设 $a>1$，若对于任意的$x\in[a,2a]$，都有$y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=3$，这时 a 的取值的集合为　(B)

$\log_a xy=3=\log_a a^3$

A. $\{a\mid 1<a\leqslant 2\}$　　B. $\{a\mid a\geqslant 2\}$　　C. $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 3\}$　　D. $\{2,3\}$

$y=\frac{a^3}{x}\in[\frac{a^2}{2},a^2]$

$x\in[a,2a]$

$\frac{a^2}{2}\geq a$　$(a>1)$

$\therefore\ a\geq 2$.

6. (2012 陕西文理 21) 设函数 $f(x)=x^2+bx+c$，若对任意 $x_1, x_2 \in [-1,1]$，有 $|f(x_1)-f(x_2)| \le 4$，求 b 的取值范围.

$\forall x_1, x_2 \in [-1,1]$， $f(x)_{max}-f(x)_{min} \le 4$

解：

(1) 当 $\left|\frac{b}{2}\right|>1$ 时 $f(x)_{max}-f(x)_{min}=|f(1)-f(-1)|=|2b|>4$ 不满足

(2) 当 $-1 \le -\frac{b}{2}<0$ 时 $f(x)_{max}-f(x)_{min}=f(1)-f(-\frac{b}{2})=1+b+\frac{b^2}{4}=(\frac{b}{2}+1)^2 \le 4$

$0<b \le 2$

$\therefore$ $0<b \le 2$

(3) 当 $0 \le -\frac{b}{2} \le 1$ 时 $f(x)_{max}-f(x)_{min}=f(-1)-f(-\frac{b}{2})=1-b+\frac{b^2}{4}=(\frac{b}{2}-1)^2 \le 4$

$-2 \le b \le 0$

$\therefore$ $-2 \le b \le 0$

$\therefore$ 综上，$b \in [-2,2]$

7. 设 $a \geqslant 1$, $f(x)=\dfrac{4x^2-7}{2-x}$, $g(x)=x^3-3a^2x-2a$, $x \in [0,1]$，若对于任意 $x_1 \in [0,1]$，总存在 $x_0 \in [0,1]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$ 成立，求 a 的范围.

解： 题意等价于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域是 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上值域的子集.

$f'(x)=-\dfrac{(2x-1)(2x-7)}{(2-x)^2}$

$x \in (0,\frac{1}{2})$ $f'(x)<0$ $f(x)\downarrow$

$x \in (\frac{1}{2},1)$ $f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

$f(x)_{min}=f(\frac{1}{2})=-4$， $f(x)_{max}=\max\{f(0),f(1)\}=-3$

$\therefore$ $f(x)$ 的值域为 $[-4,-3]$.

$g'(x)=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a) \le 0$

$g(x)$ 在 $[0,1]\downarrow$

$g(x) \in [1-2a-3a^2, -2a]$

$\therefore$ $[-4,-3] \subset [1-2a-3a^2, -2a]$

$$\therefore \begin{cases} 1-2a-3a^2 \le -4 \\ -2a \geqslant -3 \end{cases}$$

$\therefore$ $1 \le a \le \frac{3}{2}$ 或 $a \le -\frac{5}{3}$

又 $a \geqslant 1$

$\therefore$ $a \in [1,\frac{3}{2}]$.