

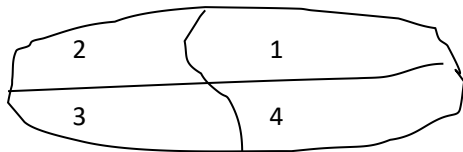
江苏省仪征中学 2018—2019 学年度第二学期期末模拟试题（二）

高二数学

一、填空题

1. 函数 $f(x) = \sqrt{x-1} + (2-x)^0$ 的定义域为_____
2. 已知复数 z 满足 $(-1+2i) + \bar{z} = 5-6i$ ，则 $|z|$ 的值为_____
3. 若 $A_n^3 = 6C_n^4$ ，则 n 的值为_____
4. 若“ $x > a$ ”是“ $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ ”成立的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是_____
5. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2ax + 1 \leq 0$. 若命题 $\neg p$ 是真命题，则实数 a 的取值范围是_____
6. 用数学归纳法证明“ $1+2+3+\cdots+(2n+1) = (n+1)(2n+1)$ ”时，由 $n=k$ 时等式成立推证 $n=k+1$ 时，左边应增加的项为_____
7. 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间为_____
8. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi = \frac{k}{5}) = ak (k=1,2,3,4,5)$ ，则 $P(\xi \geq \frac{3}{5}) =$ _____
9. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，且 $f(-3) = 0$ ，则使得 $xf(x) < 0$ 的 x 的取值范围是_____
10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数，在区间 $[-1, 1]$ 上，
$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{bx+2}{x+1}, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$
 其中 $a, b \in \mathbf{R}$. 若 $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2})$ ，则 $a+3b$ 的值为_____
11. 在平面内，以正三角形的三边中点为顶点的三角形与原三角形的面积之比为 1:4. 类比该命题，在空间中，以正四面体的四个面的中心为顶点的四面体与原四面体的体积之比为_____
12. 已知函数 $f(x) = x \ln x$ ， $g(x) = -x^2 + ax - 3$ ，对一切 $x \in (0, +\infty)$ ， $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____

13. 用红、黄、蓝、白、黑五种颜色涂在如图所示的四个区域内，每个区域涂一种颜色，相邻两个区域涂不同的颜色，五种颜色可以反复使用，共有_____种不同的涂色方法？



14. 若函数 $f(x) = a^x - x^2 (a > 1)$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____

二、解答题

15. 已知复数 $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + 4i$, i 为虚数单位.

(1) 若复数 $z_1 + az_2$ 对应的点在第四象限，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$, 求 z 的共轭复数 $\bar{z}$.

16. 设 $a \in \mathbb{R}$, 命题 $p: \exists x \in [1, 2]$, 满足 $(a - 1)x - 1 > 0$. 命题 $q: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + ax + 1 > 0$,

(1) 若命题 $p \wedge q$ 是真命题，求 a 的范围；

(2) $(\neg p) \wedge q$ 为假, $(\neg p) \vee q$ 为真，求 a 的取值范围.

17. 设 $f_n(x) = (1 + mx)^n$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$.

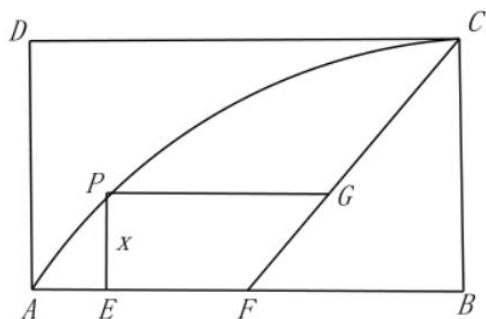
(1) 求 $f_4(x)$ 展开式中的二项式系数最大的项；

(2) 设 $f_5(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 若 $a_4 = 80$, 求 $\sum_{i=0}^5 a_i$ 的值;

18. 为了纪念五四青年节，学校决定举办班级黑板报主题设计大赛，高三（1）班李明同学将班级长 $AB=4$ 米、宽 $BC=2$ 米的黑板做如图所示的区域划分：取 AB 中点 F ，连接 CF ，以 AB 为对称轴，过 A 、 C 两点作一抛物线弧，在抛物线弧上取一点 P ，作 $PE \perp AB$ 垂足为 E ，作 $PG \parallel AB$ 交 CF 于点 G 。在四边形 $PEFG$ 内设计主题 LOGO，其余区域用于文字排版。

（1）设 $PE=x$ ，求 PG 的长度 $f(x)$ ；

（2）求四边形 $PEFG$ 面积的最大值。



19. 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ，函数 $g(x) = \log_3 x$ 。

（1）若 $g(mx^2 + 2x + m)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，求实数 m 的取值范围；

（2）当 $x \in [-1, 1]$ ，求函数 $y = [f(x)]^2 - 2af(x) + 3$ 的最小值 $h(a)$ ；

（3）是否存在实数 m, n ，使得函数 $y = 2x + \log_3 f(x^2)$ 的定义域为 $[m, n]$ ，值域为 $[4m, 4n]$ ？若存在，求出 m, n 的值；若不存在，则说明理由。

20. 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax^2$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线过点 $A(2, -2)$.

① 求实数 a 的值;

② 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 当 $s > 0$ 时, 试比较 $g(s)$ 与 $g(\frac{1}{s})$ 的大小;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 求证: $f(x_1) > -\frac{1}{2}$.

江苏省仪征中学 2018—2019 学年度第二学期期末模拟试题(二)

高二数学 (答案)

一、填空题

1. $[1,2) \cup (2,+\infty)$ 2. 10 3. 7 4. $[3, +\infty)$ 5. $[0,1)$
 6. $4k+5$ 7. $(0,1]$ 8. $\frac{4}{5}$ 9. $(-\infty, -3) \cup (0,3)$ 10. -10
 11. 1:27 12. $(-\infty, 4]$ 13. $A_4^3 + 2C_5^1 C_4^2 + A_5^2 = 260$ 种 14. $(1, e^{\frac{2}{e}})$

二、解答题

15 解: (1) $z_1 + az_2 = (1+3a) + (4a-2)i$, 由题意得 $\begin{cases} 1+3a > 0 \\ 4a-2 < 0 \end{cases}$, 解得 $a \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

$$(2) z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(1-2i) - (3+4i)}{(1-2i) + (3+4i)} = \frac{-2-6i}{4+2i} = -1-i, \bar{z} = -1+i.$$

16. 解: (1) p 真, 则 $\begin{cases} a-1 > 0 \\ 2(a-1)-1 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-1 < 0 \\ 1 \cdot (a-1)-1 > 0 \end{cases}$ 得 $a > \frac{3}{2}$;2 分

q 真, 则 $a^2 - 4 < 0$, 得 $-2 < a < 2$,4 分

$\therefore p \wedge q$ 真, $\frac{3}{2} < a < 2$7 分

(2) 由 $(\neg p) \wedge q$ 为假, $(\neg p) \vee q$ 为真 $\Rightarrow p, q$ 同时为假或同时为真,

若 p 假 q 假, 则 $\begin{cases} a \leq -\frac{3}{2} \\ a \leq -1 \text{ 或 } a \geq 2 \end{cases}$, $\Rightarrow a \leq -2$,10 分

若 p 真 q 真, 则 $\begin{cases} a > \frac{3}{2} \\ -2 < a < 2 \end{cases}$, $\Rightarrow \frac{3}{2} < a < 2$ 13 分

综上 $a \leq -2$ 或 $\frac{3}{2} < a < 2$14 分

17 解 (1) 因为 $f_4(x) = (1+mx)^4$,

则 $f_4(x)$ 展开式中二项式系数最大的项是第 3 项,

$$\text{为 } C_4^2 (mx)^2 = 6m^2 x^2$$

$$(2) f_5(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 = (1 + mx)^5,$$

因为 $a_4 = C_5^4 m^4$, 即 $5m^4 = 80$, 所以 $m = 2$,

$$\text{故有 } \sum_{i=0}^5 a_i = (1 + 2 \times 1)^5 = 3^5 = 243.$$

18

解: (1)以 A 为坐标原点, 以 AB, AD 所在的直线为 x 轴, y 轴建立平面直角坐标系.

所以 $A(0,0), C(4,2), B(4,0), F(2,0)$,

所以直线 FC 为 $x - y - 2 = 0$ 1 分

因为抛物线是以 AB 为对称轴, 设抛物线的方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$,

因为点 C 在抛物线上, 所以 $p = \frac{1}{2}$, 所以 $y^2 = x$ 3 分

因为 $PE = x$, 所以 $P(x^2, x), G(x+2, x)$,

所以 $f(x) = -x^2 + x + 2 (0 < x < \sqrt{2})$ 6 分

(2)因为 $PE \perp AB$, $PG \parallel AB$,

$$\begin{aligned} \text{所以四边形 } PEF G \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2}(EF + PG)PE = \frac{1}{2}(2 - x^2 + x + 2 - x^2) \\ &= -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \end{aligned} \text{8 分}$$

设 $g(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$, 由 $g'(x) = -3x^2 + x + 2 = 0$, 解得: $x = 1$ 10 分

x	$(0,1)$	1	$(1, \sqrt{2})$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	Z	极大值	]

所以 $x = 1$ 米时, 四边形 $PEFG$ 面积取得最大值为 $\frac{3}{2}$ 平方米

答: 四边形 $PEFG$ 面积最大值为 $\frac{3}{2}$ 平方米

19.(1)由题意 $mx^2 + 2x + m > 0$ 对任意实数 x 恒成立,

$$\therefore m=0 \text{ 时显然不满足 } \therefore \begin{cases} m > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \therefore m > 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 令 } f(x) = t (t \in [\frac{1}{3}, 3]), \text{ 则 } y = t^2 - 2at + 3 = (t-a)^2 + 3 - a^2$$

$$\therefore h(a) = \begin{cases} \frac{28-6a}{9}, & a < \frac{1}{3} \\ 3-a^2, & \frac{1}{3} \leq a \leq 3 \\ 12-6a, & a > 3 \end{cases} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$(3) \therefore y = 2x + \log_3 f(x^2) = 2x + \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1 \leq 1$$

$$\therefore 4n \leq 1 \quad \therefore n \leq \frac{1}{4} \quad \therefore \text{函数在 } [m, n] \text{ 单调递增,}$$

$$\therefore \begin{cases} f(m) = 4m \\ f(n) = 4n \end{cases} \quad \text{又 } \therefore m < n \quad \therefore m = -2, n = 0 \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

20. 【解】(1) ①因为 $f'(x) = \ln x + 2ax + 1$, 所以 $f'(1) = 2a + 1$,

由曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切点为 $(1, a)$,

所以在 $x=1$ 处的切线方程为 $y - a = (2a + 1)(x - 1)$.

因为切线过点 $A(2, -2)$, 所以 $a = -1$. \dots\dots 4 分

$$\text{② } g(x) = \ln x - x,$$

$$\text{由 } g(s) - g\left(\frac{1}{s}\right) = (\ln s - s) - \left(\ln \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\right) = 2\ln s - s + \frac{1}{s}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{设 } h(s) = 2\ln s - s + \frac{1}{s} \quad (s > 0), \text{ 所以 } h'(s) = \frac{2}{s} - 1 - \frac{1}{s^2} = -\frac{(s-1)^2}{s^2} \leq 0,$$

所以 $h(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 为减函数.

因为 $s > 0$, 所以当 $s > 1$ 时, 有 $s > \frac{1}{s}$, 则 $g(s) < g\left(\frac{1}{s}\right)$; 当 $s = 1$ 时, 有 $s = \frac{1}{s}$, 则 $g(s) = g\left(\frac{1}{s}\right)$;

当 $0 < s < 1$ 时, 有 $s < \frac{1}{s}$, 则 $g(s) > g\left(\frac{1}{s}\right)$. \dots\dots 10 分

(2) 由题意, $f'(x) = \ln x + 2ax + 1 = 0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

设 $g(x) = \ln x + 2ax + 1$ ，则 $g'(x) = \frac{1}{x} + 2a$ ($x > 0$)，

当 $a \geq 0$ 时， $g'(x) > 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，不符合题意；

当 $a < 0$ 时，由 $g'(x) = 0$ ，得 $x = -\frac{1}{2a} > 0$ ，

列表如下：

x	$(0, -\frac{1}{2a})$	$-\frac{1}{2a}$	$(-\frac{1}{2a}, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

由题意，

$g(-\frac{1}{2a}) = \ln(-\frac{1}{2a}) > 0$ ，解得 $-\frac{1}{2} < a < 0$ ，所以 $g(1) = 1 + 2a > 0$ ，

因为 $x_1 < x_2$ ，所以 $0 < x_1 < 1$ 。..... 13 分

因为 $f'(x_1) = \ln x_1 + 2ax_1 + 1 = 0$ ，所以 $ax_1 = -\frac{1 + \ln x_1}{2}$ ，

所以 $f(x_1) = x_1 \ln x_1 - x_1 \cdot \frac{1 + \ln x_1}{2} = \frac{x_1(\ln x_1 - 1)}{2}$ ($0 < x_1 < 1$)。

令 $\varphi(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{2}$ ($0 < x < 1$)，

因为 $\varphi'(x) = \frac{\ln x}{2} < 0$ ，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数，

所以 $\varphi(x_1) > \varphi(1) = -\frac{1}{2}$ ，即 $f(x_1) > -\frac{1}{2}$ ，

所以，命题得证。..... 16 分