

江苏省仪征中学 2020-2021 学年第二学期高二数学

周末练习 (5)

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。

1. 在复平面内, 复数 z 对应的点的坐标是 $(3, 1)$, 则 $\frac{1}{z} =$ ()

- A. $\frac{3}{8} - \frac{1}{8}i$ B. $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$ C. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$ D. $\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

2. 若 $C_{13}^{x+1} = C_{13}^{2x-3}$, 则 x 的值为 ()

- A. 4 B. 5 C. 4 或 5 D. 以上都不是

3. 设曲线 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 在点 $(1, -2)$ 处的切线与直线 $ax - by + c = 0$ 垂直, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. -3

4. 用 0, 1, 2, ..., 8 这九个数字组成无重复数字的三位数的个数是 ()

- A. A_9^3 B. $8A_8^2$ C. $A_9^3 - A_8^3$ D. A_8^3

5. “中国梦”的英文翻译为 “*China Dream*”, 其中 *China* 又可以简写为 *CN*, 从 “*CN Dream*” 中取 6 个不同的字母排成一排, 含有 “*ea*” 字母组合 (顺序不变) 的不同排列共有 ()

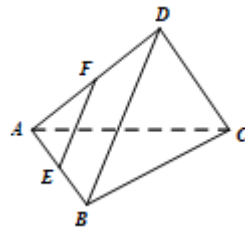
- A. 360 种 B. 480 种 C. 600 种 D. 720 种

6. 若 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 在其定义域内的一个子区间 $(k-1, k+1)$ 内不单调, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $\left(1, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ C. $\left[1, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

7. 如图, 已知等边 $\triangle ABC$ 与等边 $\triangle ABD$ 所在平面成锐二面角 $\frac{\pi}{3}$, E, F 分别为 AB, AD 中点, 则异面直线 EF 与 CD 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



8. 已知函数 $f(x) = e^{|2x|} - 4ax^2$, 对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) < 0$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right]$ C. $\left[0, \frac{e^2}{4}\right]$ D. $\left[0, \frac{e}{2}\right]$

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题意要求.全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的2分.

9. 下列关于复数的说法,其中正确的是 ()

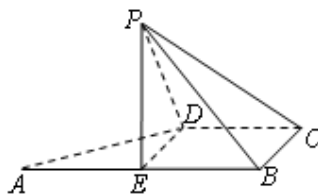
- A. 复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 是实数的充要条件是 $b = 0$
- B. 复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 是纯虚数的充要条件是 $b \neq 0$
- C. 若 z_1, z_2 互为共轭复数, 则 $z_1 z_2$ 是实数
- D. 若 z_1, z_2 互为共轭复数, 则在复平面内它们所对应的点关于 y 轴对称

10. 某学生想在物理、化学、生物、政治、历史、地理、技术这七门课程中选三门作为选考科目, 下列说法中错误的是 ()

- A. 若任意选择三门课程, 选法总数为 A_7^3
- B. 若物理和历史不能同时选, 选法总数为 $C_7^3 - C_5^1$
- C. 若物理和化学至少选一门, 选法总数为 $C_2^1 C_5^2$
- D. 若物理和化学至少选一门, 且物理和历史不能同时选, 选法总数为 $C_2^1 C_5^2 - C_5^1$

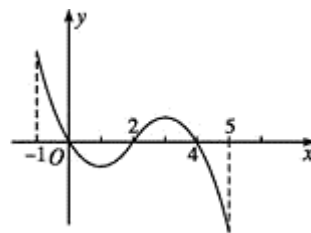
11. 如图, 直角梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $BC = CD = \frac{1}{2}AB = 1$, E 为 AB 中点, 以 DE 为折痕把 ADE 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 且 $PC = \sqrt{3}$, 则 ()

- A. 平面 $PED \perp$ 平面 $EBCD$
- B. 二面角 $P - DC - B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$
- C. $PC \perp ED$
- D. PC 与平面 PED 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$



12. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $[-1, 5]$, 部分对应值如表, $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图像如图所示.

x	-1	0	2	4	5
$f(x)$	1	2	0	2	1



下列关于函数 $f(x)$ 的结论正确的有 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的极大值点有 2 个;
- B. 函数在 $f(x)$ 上 $[0, 2]$ 是减函数;
- C. 若 $x \in [-1, t]$ 时, $f(x)$ 的最大值是 2, 则 t 的最大值为 4;
- D. 当 $1 < a < 2$ 时, 函数 $y = f(x) - a$ 有 4 个零点.

三、填空题:本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 计算 $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 =$ _____ (用数字作答)

14. 中国古代中的“礼、乐、射、御、书、数”合称“六艺”. “礼”, 主要指德育; “乐”, 主要指美育; “射”和“御”, 就是体育和劳动; “书”, 指各种历史文化知识; “数”, 数学. 某校国学社团开展“六艺”课程讲座活动, 每艺安排一节, 连排六节, 一天课程讲座排课有如下要求: “数”必须排在前三节, 且“射”和“御”两门课程相邻排课, 则关于“六艺”课程讲座不同排课顺序的种数为_____. (用数字作答)

15. 已知函数 $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + b$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, 若函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值, 则实数 a 的取值范围是_____; 若 $a=4$, 则函数 $f(x)$ 的所有极值点之和为_____.

16. 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $e^x - a \ln x > a \ln a$ 恒成立, 则正实数 a 的取值范围为_____

四、解答题:本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知复数 $z = \frac{6-4mi}{1+i}$ ($m \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位).

- (1) 若 z 是纯虚数, 求实数 m 的值;
(2) 设 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 复数 $\bar{z} - 2z$ 在复平面上对应的点位于第二象限, 求实数 m 的取值范围.

18. 为了某次的航天飞行, 现准备从 10 名预备队员 (其中男 6 人, 女 4 人) 中选 4 人参加航天任务. (注意: 用文字简述解题思路, 结果用数字作答)

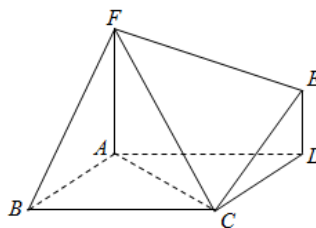
- (1) 若男甲和女乙同时被选中, 共有多少种选法?
(2) 若至少两名男航天员参加此次航天任务, 问共有几种选法?
(3) 若选中的四个航天员分配到 A 、 B 、 C 三个实验室去, 其中每个实验室至少一个航天员, 共有多少种选派法?

19. 已知函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x} e^x$. (e 是自然对数的底数, $e \approx 2.71828 \cdots$)

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 设函数 $h(x) = f(x) - 2x - 1$, 求证: 当 $x > 0$ 时, $h(x) > 0$.

20. 如图, 多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, $FA \perp$ 平面 $ABCD$, $FA \parallel ED$, $AB = FA = 2ED = 2$.

- (1) 求二面角 $F-BC-A$ 的大小的正切值;
 (2) 求直线 FC 与平面 ABF 所成的角的正弦值.



21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - ax - 2x + 2\ln x$, $a > 0$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 (2) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值为 -3 , 求实数 a 的值.

22. 设函数 $f(x) = \ln x - ax$ ($a \in \mathbb{R}$), $g(x) = xf(x)$.

- (1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

- (2) ①若 $a = \frac{1}{2}$, 试讨论 $g(x)$ 的单调性;

②若 $g(x) = \frac{e^2}{2}$ 有两个不同的零点, 求实数 a 的取值范围, 并说明理由.

周末练习（5）答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。 DCAB CCCA

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题意要求.
全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的 2 分.

9. AC 10. ACD 11. AB 12. ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 35 14. 120 15. (1). $\left[-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right]$ (2). -3 16. $(0, e)$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) $z = \frac{(6-4mi)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 3-2m-(3+2m)i$,3 分

因为 z 为纯虚数, 所以 $\begin{cases} 3-2m=0 \\ 3+2m \neq 0 \end{cases}$, 解得 $m = \frac{3}{2}$5 分

(2) 因为 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 所以 $\bar{z} = 3-2m+(3+2m)i$,

所以 $\bar{z}-2z = 2m-3+(9+6m)i$7 分

因为复数 $\bar{z}-2z$ 在复平面上对应的点位于第二象限, 所以

$\begin{cases} 2m-3 < 0 \\ 9+6m > 0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$10 分

18 解: (1) 若男甲和女乙同时被选中, 剩下的 2 人从 8 人中任选 2 人即可.

即有 $C_8^2 = 28$ 种;4 分

(2) 至少两名男航天员, 可以分为 2 名, 3 名, 4 名三类, 利用分类计数原理可得

$C_6^2 \cdot C_4^2 + C_6^3 \cdot C_4^1 + C_6^4 = 185$ 种;8 分

(3) 先选 4 名航天员, 然后把这 4 名航天员可以分 2, 1, 1 一组, 再分配到 A、B、C 三个实验室去,

共有 $C_{10}^4 \cdot \frac{C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1}{A_2} \cdot A_3 = 7560$ 种.12 分

19. (1) 由题得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,1 分

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2} e^x \text{ 化简得 } f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)}{x^2} e^x.$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}$, 所以单调增区间为 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以单调减区间为 $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$,

综上 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -1)$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 单调减区间为 $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$5 分

(2) $h(x) = \frac{2x+1}{x}e^x - 2x - 1$, 即 $h(x) = (2x+1)(\frac{e^x}{x} - 1)$,

令 $g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$, 令 $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$ 得 $x = 1$7 分

列表

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 最小值为 $g(1) = e - 1 > 0$,10 分

所以 $g(x) \geq g(1) > 0$.

因为当 $x > 0$ 时, $2x + 1 > 0$, 所以 $h(x) = (2x + 1)(\frac{e^x}{x} - 1) > 0$, 得证.12 分

20 (1) 解: (1) 作 $AG \perp BC$ 于点 G , 连接 FG ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 2$,

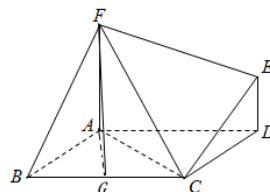
$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形, $BG = GC = 1$, $AG = \sqrt{3}$,

$\because FA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore FA \perp BC$, 又 $\because AG \perp BC$, $AG \cap FA = A$,

$\therefore BC \perp$ 平面 AFG , $\angle AGF$ 为二面角 $F - BC - A$ 的平面角,

$\therefore \tan \angle AGF = \frac{AF}{AG} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;6 分



(2) 作 $CH \perp AB$ 于点 H , 连接 FH ,

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

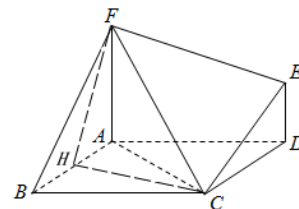
$\therefore H$ 为 AB 的中点, $AH = 1$, $CH = \sqrt{3}$, $FH = \sqrt{FA^2 + AH^2} = \sqrt{5}$,

$\because FA \perp$ 平面 $ABCD$, $CH \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore FA \perp CH$,

又 $\because CH \perp AB$, $AB \cap AF = A$, $\therefore CH \perp$ 平面 ABF ,

$\therefore \angle CFH$ 为直线 FC 与平面 ABF 所成的角,

$\sin \angle CFH = \frac{CH}{CF} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$12 分



21 (1) $f'(x) = ax - (a+2) + \frac{2}{x} = \frac{ax^2 - (a+2)x + 2}{x} = \frac{(x-1)(ax-2)}{x},$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{a},$

1°. $1 < \frac{2}{a}$ 即 $0 < a < 2$

x	$(0,1)$	1	$\left(1, \frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调增; 在 $\left(1, \frac{2}{a}\right)$ 上单调减; 在 $\left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 上单调增.

2°. $1 = \frac{2}{a}$ 即 $a = 2$, 此时 $f'(x) = \frac{(x-2)^2}{x} \geq 0, \therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增.

3°. $1 > \frac{2}{a}$ 即 $a > 2$,

x	$\left(0, \frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2}{a}\right)$ 上单调增; 在 $\left(\frac{2}{a}, 1\right)$ 上单调减; 在 $(1, +\infty)$ 上单调增.

综上所述:

当 $0 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调增; 在 $\left(1, \frac{2}{a}\right)$ 上单调减; 在 $\left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 上单调增.

当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增.

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2}{a}\right)$ 上单调增; 在 $\left(\frac{2}{a}, 1\right)$ 上单调减; 在 $(1, +\infty)$ 上单调增.6 分

(2) 1°. 当 $\frac{2}{a} \leq 1$ 时, 即 $a \geq 2$.

$f'(x) \geq 0$, $\therefore f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 此时 $f(x)_{\min} = f(1) = -\frac{1}{2}a - 2 = -3$, $\therefore a = 2$.

2°. 当 $\frac{2}{a} \geq 2$ 时, 即 $0 < a \leq 1$,

$f'(x) \leq 0$, $\therefore f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 此时 $f(x)_{\min} = f(2) = -4 + 2\ln 2 \neq -3$, $\therefore$ 无解.

3°. 当 $1 < \frac{2}{a} < 2$ 时, 即 $1 < a < 2$,

x	1	$\left(1, \frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a}, 2\right)$	2
$f'(x)$		-	0	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\therefore f(x)$ 在 $\left(1, \frac{2}{a}\right)$ 上单调减; 在 $\left(\frac{2}{a}, 2\right)$ 上单调增. $\therefore f(x)_{\min} = f\left(\frac{2}{a}\right) = -2 - \frac{2}{a} + 2\ln \frac{2}{a} = -3$ ①

令 $g(x) = -2 - \frac{2}{a} + 2\ln \frac{2}{a}$, $\therefore g'(x) = \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a} = \frac{2(1-a)}{a^2}$,

$\therefore g'(x)$ 在 $1 < a < 2$ 上 $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 单调递减, $\therefore g(x) \in (-3, -3 + 2\ln 2)$, $\therefore$ ① 无解,

综上所述: $a = 2$12 分

22 (1) $\because \ln x - ax \leq 0$, $\therefore ax \geq \ln x$, $a \geq \frac{\ln x}{x}$

令 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 得: $x = e$, 且 $1 - \ln x$ 单减

$\therefore h(x)$ 在 $(0, e)$ 单增, $(e, +\infty)$ 单减, $\therefore h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$ $\therefore a \geq \frac{1}{e}$ 3 分

(2) ① 由题得: $g(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^2$ $\therefore g'(x) = \ln x - x + 1$

令 $h(x) = \ln x - x + 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$ $\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增, $(1, +\infty)$ 单减

$\therefore h(x)_{\max} = h(1) = 0$ $\therefore h(x) \leq 0$ 恒成立, 即 $g'(x) \leq 0$ 恒成立

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调

.....7 分

②法一：除 x

$g(x) = \frac{e^2}{2}$ 有两个不同的零点，即 $x \ln x - ax^2 - \frac{e^2}{2} = 0$ ，即 $\ln x - ax - \frac{e^2}{2x} = 0$ 有两个不同的零点

$$\text{令 } h(x) = \ln x - ax - \frac{e^2}{2x}, \quad h'(x) = \frac{1}{x} - a + \frac{e^2}{2x^2} = \frac{-2ax^2 + 2x + e^2}{2x^2}$$

当 $a \leq 0$ 时， $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立，不满足两个零点，舍

当 $a > 0$ 时，令 $h'(x) = 0$ 易得： $h'(x_1) = h'(x_2) = 0$ ，且 $x_1 < 0 < x_2$

$$\therefore h(x)_{\max} = h(x_2) = \ln x_2 - ax_2 - \frac{e^2}{2x_2} = \ln x_2 - 1 - \frac{e^2}{x_2}$$

令 $\varphi(x) = \ln x_2 - 1 - \frac{e^2}{x_2}$ ，易得： $\varphi(x)$ 单增，且 $\varphi(e^2) = 0$

$$\therefore h(x)_{\max} > 0, \text{ 则 } x_2 > e^2, \text{ 将 } x_2 = e^2 \text{ 代入 } -2ax^2 + 2x + e^2 \text{ 得: } -2ae^4 + 3e^2 > 0, \quad a < \frac{3}{2e^2}$$

$$\text{且 } h(1) < 0, \quad h\left(\frac{1}{a}\right) < -2\ln a - \frac{1}{a} = m(a), \quad m'(a) = -\frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{1-2a}{a^2} > 0 \Rightarrow m(a) < m(1) = -1 < 0$$

$$\text{综上: } 0 < a < \frac{3}{2e^2} \quad \text{.....12 分}$$

法二：除 x^2

$$x \ln x - ax^2 = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow h(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{e^2}{2x^2} - a = 0, \quad h'(x) = \frac{x - x \ln x + e^2}{x^3}$$

令 $s(x) = x - x \ln x + e^2$ ， $s'(x) = -\ln x$ ，所以 $s(x)$ 在 $(0, 1) \uparrow (1, +\infty) \downarrow$

$$s(1) = e^2, \quad s(e^2) = 0, \quad \text{当 } x < 1, \quad x - x \ln x + e^2 = x(1 - \ln x) + e^2 > 0$$

$$\text{所以 } h(x) \text{ 在 } (0, e^2) \uparrow (e^2, +\infty) \downarrow \quad h(e^2) = \frac{3}{2e^2} - a > 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2e^2}$$

①当 $a \leq 0$ 时， $x > e^2$ ， $h(x) = \frac{x \ln x - e^2}{2x^2} - a > 0$ ，至多一个零点，舍去；

②当 $0 < a < \frac{3}{2e^2}$ 时， $h(1) = -\frac{e^2}{2} - a < 0$ ，所以在 $(1, e^2)$ 上存在一个零点。

$$t(x) = \ln x - \sqrt{x}, \quad t'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}, \quad (0, 4) \uparrow (4, +\infty) \downarrow t(x) \leq t(4) = 2\ln 2 - 2 < 0$$

$$h(x) = \frac{2x \ln x - e^2}{2x^2} - a < \frac{2x\sqrt{x} - e^2}{2x^2} - a < \frac{2x\sqrt{x}}{2x^2} - a = \frac{1}{\sqrt{x}} - a < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{a^2}, \quad h\left(\frac{1}{a^2} + e^2\right) < 0$$

所以在 $\left(e^2, \frac{1}{a^2} + e^2\right)$ 又存在一个零点, 符合题意

法三: 直接研究 $h(x) = x \ln x - ax^2 - \frac{e^2}{2}, \quad h'(x) = \ln x + 1 - 2ax, \quad h''(x) = \frac{1}{x} - 2a$

①若 $a = 0$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{e^2}{2x}$, 单调递增至多一个, 舍去

②若 $a < 0$, $h''(x) > 0 \Rightarrow h'(x) \uparrow$, $h'(e^{2a-1}) = 2a - 1 + 1 - 2ax < 0$, $h'(1) = 1 - 2a > 0$ 故存在

$x_0 \in (e^{2a-1}, 1)$, $h'(x_0) = 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0) \downarrow (x_0, +\infty) \uparrow$

$x < x_0$ 时 $h\left(\frac{e}{\sqrt{-2a}}\right) = \frac{e}{\sqrt{-2a}} \ln \frac{e}{\sqrt{-2a}} - a \left(\frac{e}{\sqrt{-2a}}\right)^2 - \frac{e^2}{2} < 0$, 所以至多存在一个零点, 舍去

③ $a > 0$, $h'(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2a}\right) \uparrow \left(\frac{1}{2a}, +\infty\right) \downarrow$, $h'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2a}{e} < 0$, $h'\left(\frac{1}{2a}\right) > 0$, $h'\left(\frac{1}{4a^2}\right) < 0$

记 $h(x_1) = 0$, $h(x_2) = 0$, $h(x)$ 在 $(0, x_1) \downarrow (x_1, x_2) \uparrow (x_2, +\infty) \downarrow$

$h(x) = x(\ln x - a) - \frac{e^2}{2}$, 所以当 $x \in (0, e^a)$, $h(x) < 0$, 要使有两个零点, 必须使得

$$h(x_2) > 0 \Leftrightarrow x_2 \ln x_2 - \frac{\ln x_2 + 1}{2} x_2 - \frac{e^2}{2} = \frac{x_2 \ln x_2 - x_2}{2} - \frac{e^2}{2} > 0 \Rightarrow x_2 > e^2 \Rightarrow a = \frac{\ln x_2 + 1}{2x_2} < \frac{3}{2e^2}$$

$h(x) < x\sqrt{x} - ax^2 - \frac{e^2}{2} < x(\sqrt{x} - ax) < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{a^2}$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, x_2)$, $\left(x_2, x_2 + \frac{1}{a^2}\right)$ 上各存在一个

零点.