双曲线的标准方程与几何性质探析

知识点：

1. 双曲线的定义
2. 双曲线的标准方程
3. 双曲线的几何性质

小题热身：

1. 设F_1，F_2是双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$的两个焦点，点 P 在双曲线上.若点 P 到焦点F_1的距离等于 9，则点 P 到焦点F_2的距离等于______.

2. 与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$共渐近线且过点$\left(2\sqrt{3},-3\right)$的双曲线方程是____________.

3. 直线 l 与双曲线$x^2-4y^2=4$相交于 A、B 两点，若点$P(4,1)$为线段 AB 的中点，则直线 l 的方程是_______.

4. 若直线$y=kx-1$与双曲线$x^2-y^2=4$只有一个公共点，则 k 的值是______.

5. 已知椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线$N$：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$.若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，则椭圆 M 的离心率为___________；双曲线 N 的离心率为___________.

6. 已知 F 是双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{8}=1$的右焦点，P 是双曲线 C 上的点，$A\left(0,6\sqrt{6}\right)$，

   若点 P 在双曲线右支上，则$|AP|+|PF|$的最小值为__________；

   若点 P 在双曲线左支上，则当ΔAPF周长最小时，ΔAPF的面积为___________

例题讲解：

例1、 设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$与直线 l：$x+y=1$相交于两个不同的点 A，B.

(1)求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围；

(2)设直线 l 与 y 轴的交点为 P，且$\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$，求 a 的值.

例 2、已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$经过点$(2,3)$，两条渐近线的夹角为$60°$，直线 l 交双曲线于 A、B 两点.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)若 l 过原点，P 为双曲线上异于 A，B 的一点，且直线 PA、PB 的斜率k_{PA}，k_{PB}均存在，求证：$k_{PA}\cdot k_{PB}$为定值；

(3)若 l 过双曲线的右焦点F_1，是否存在 x 轴上的点$M(m,0)$，使得直线 l 绕点F_1无论怎样转动，都有$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$成立？若存在，求出 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

归纳小结：

巩固练习：

1、已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点 P 在双曲线的右支上，且$|PF_1|=4|PF_2|$，则双曲线离心率的取值范围是(   )

A. $(\frac{5}{3},2]$　　B. $(1,\frac{5}{3}]$　　C. $(1,2]$　　D. $[\frac{5}{3},+\infty)$

2、双曲线$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$的一条弦被点$P(4,2)$平分，那么这条弦所在的直线方程是(   )

A. $x-y-2=0$　　B. $2x+y-10=0$　　C. $x-2y=0$　　D. $x+2y-8=0$

3、已知直线$y=kx-1$与双曲线$x^2-y^2=4$的右支有两个交点，则 k 的取值范围为(   )

A. $(0,\frac{\sqrt{5}}{2})$　　B. $[1,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　C. $(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$　　D. $(1,\frac{\sqrt{5}}{2})$

4、已知动圆 M 过定点$B(-4,0)$，且和定圆$(x-4)^2+y^2=16$相切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为(   )

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1(x>0)$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1(x<0)$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　D. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$

5、已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$O$ 为坐标原点，点 P 是双曲线在第一象限内的点，直线PO,PF_2分别交双曲线 C 的左、右支于另一点M,N，若$|PF_1|=2|PF_2|$，且$\angle MF_2N=120^\circ$，则双曲线的离心率为(   )

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\sqrt{7}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

6、已知 A，B 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上关于坐标原点对称的两点，$F$ 为其右焦点，若满足$AF\perp BF$，且$\angle ABF$的取值范围为$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$，则该双曲线的离心率的取值范围是(   )

A. $[\frac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{2}]$　　B. $[\sqrt{2},\sqrt{3}+1]$　　C. $[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}+1]$　　D. $[\sqrt{2},+\infty)$

7、已知椭圆C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和双曲线$C_2$：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$的焦点相同，$F_1$，$F_2$分别为左、右焦点，$P$ 是椭圆和双曲线在第一象限的交点，$PM\perp x$轴，M 为垂足，若$|OM|=\frac{2}{3}|OF_2|$(O为坐标原点)，则椭圆和双曲线的离心率之积为________.

8、已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，斜率为$-\frac{1}{8}$的直线与$E$的左右两支分别交于$A$，$B$两点，点$P$的坐标为$(-1,2)$，直线$AP$交$E$于另一点$C$，直线$BP$交$E$于另一点$D$.若直线$CD$的斜率为$-\frac{1}{8}$，则$E$的离心率为_____________.

9、已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左右焦点为$F_1$，$F_2$，过$F_2$作$x$轴的垂线与$C$相交于$A$，$B$两点，$F_1B$与$y$轴相交于$D$.若$AD\perp F_1B$，则双曲线$C$的离心率为______

10、已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上存在两点$A$，$B$关于直线$y=x-8$对称，且线段$AB$的中点在直线$x-2y-14=0$上，则双曲线的离心率为________.

11、已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，且过点$(\sqrt{2},2)$.

(1) 求双曲线C的标准方程

(2) 过点$(0,1)$且斜率为k的直线l与双曲线C相交于A，B两点，O为坐标原点，已知$\triangle OAB$的面积为$\frac{4}{3}$，求直线的斜率k.

12、已知椭圆C_1的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，双曲线C_2的左、右焦点分别是C_1的左、右顶点，而C_2的左、右顶点分别是C_1的左、右焦点，O为坐标原点. (1)求双曲线C_2的方程；

(2)若直线l：$y=kx+\sqrt{2}$与双曲线C_2恒有两个不同的交点A和B，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$，求$k$的取值范围.

答案

小题热身：

1、【答案】17

【解析】

【分析】本题考查双曲线的定义，属于基础题.

由题设得$||PF_1|-|PF_2||=2a=8$.故得$|PF_2|=1$或$|PF_2|=17|$，可得结论.

【解答】解：因为F_1，F_2是双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$的两个焦点，所以$||PF_1|-|PF_2||=2a=8$.

因为$|PF_1|=9$，所以$|PF_2|=1$或$|PF_2|=17$，

又$c-a=6-4=2$，所以$|PF_2|=1$舍去，

所以$|PF_2|=17$.

2.【答案】$\frac{y^2}{\frac{9}{4}}-\frac{x^2}{4}=1$

【解析】

【分析】

本题考查双曲线的性质和应用，双曲线标准方程的求法，解题时要注意待定系数法的合理运用，属于基础题.

设所求双曲线为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=\lambda(\lambda\neq0)$，把点$\left(2\sqrt{3},-3\right)$代入，求出$\lambda$，从而得到双曲线的方程.

【解答】

解：设与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$共渐近线的双曲线方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=\lambda(\lambda\neq0)$，

$\because$点$\left(2\sqrt{3},-3\right)$在双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=\lambda(\lambda\neq0)$上，

$\therefore \lambda=\frac{(2\sqrt{3})^2}{16}-\frac{(-3)^2}{9}=-\frac{1}{4}$,

$\therefore$所求双曲线方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-\frac{1}{4}$，即$\frac{y^2}{\frac{9}{4}}-\frac{x^2}{4}=1$.

故答案为$\frac{y^2}{\frac{9}{4}}-\frac{x^2}{4}=1$.

3.【答案】$x-y-3=0$

【解析】

【试题解析】

【分析】

本题考查直线与双曲线的位置关系，“点差法”的应用，属于基础题.

设出 A，B 的坐标，代入双曲线方程，两式相减，根据中点的坐标可知x_1+x_2和y_1+y_2的值，进而求得直线 AB 的斜率，根据点斜式求得直线的方程.

【解答】

解：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=2$，

$\because x_1^2-4y_1^2=4$，$x_2^2-4y_2^2=4$，

两式相减可得$(x_1+x_2)(x_1-x_2)-4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

$\therefore 8(x_1-x_2)-8(y_1-y_2)=0$，

$\therefore$直线 AB 的斜率$k_{AB}=1$，

$\therefore$直线 l 的方程为$y-1=x-4$，即$x-y-3=0$.

故答案为$x-y-3=0$.

4.【答案】-1或 1 或$-\frac{\sqrt{5}}{2}$或$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】本题考查双曲线的性质，直线与双曲线的位置关系，属于中档题.

根据双曲线求出渐近线方程，根据直线过定点，且与渐近线平行时与双曲线只有一个交点，即可得出结果.

【解答】解：由$\begin{cases}x^2-y^2=4\\y=kx-1\end{cases}$，消去$y$，得$(1-k^2)x^2+2kx-5=0$.当$1-k^2=0$，即$k=\pm 1$时，显然符合题意;

当$1-k^2\neq 0$时，则由$\Delta=20-16k^2=0$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，故$k=\pm 1$或$\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5【答案】$\sqrt{3}-1$；2

【解析】

【分析】

本题考查椭圆和双曲线的简单性质，考查计算能力，属于中档题.

根据题意，可得正六边形的一个顶点$(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2})$，代入椭圆方程，求出椭圆的离心率；再根据双曲线渐近线斜率求出双曲线离心率即可.

【解答】

解：椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线$N$：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$，

若双曲线N的两条渐近线与椭圆M的四个交点及椭圆M的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，

又椭圆的一个焦点为$(c,0)$，可得正六边形的一个顶点$(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2})$，

可得：$\frac{c^2}{4a^2}+\frac{3c^2}{4b^2}=1$，可得$\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4(\frac{1}{e^2}-1)}=1$，可得$e^4-8e^2+4=0$，$e\in(0,1)$，

解得$e=\sqrt{3}-1$.

同时，双曲线的渐近线的斜率为$\sqrt{3}$，即$\frac{n}{m}=\sqrt{3}$，

可得：$\frac{n^2}{m^2}=3$，即$\frac{m^2+n^2}{m^2}=4$，

可得双曲线的离心率为$\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}=2$.

故答案为：$\sqrt{3}-1$；2.

6【答案】15；$12\sqrt{6}$

【解析】

【分析】

本题主要考查双曲线的定义，标准方程及简单的几何性质，三角形面积计算等知识的综合运用，属于中档题.由题意可知，，A、P、F三点共线时，$|AP|+|PF|$的值最小，由此可求得其最小值；$|AF|=\sqrt{3^2+(6\sqrt{6})^2}=15$为定值，所以当$|AP|+|PF_1|$最小时，$\triangle APF$的周长最小，由图象可知，此时点$P$在线段$AF_1$与双曲线的交点处，计算即可.

【解答】

解：当点P在双曲线右支上时，A、P、F三点共线时，$|AP|+|PF|$的值最小，

此时$|AP|+|PF|=AF=\sqrt{3^2+\left(6\sqrt{6}\right)^2}=15$.

设左焦点为F_1，$|PF|-|PF_1|=2a=2$，

由双曲线方程$x^2-\frac{y^2}{8}=1$，可知$a=1$，$c=3$，故$F(3,0)$，$F_1(-3,0)$，

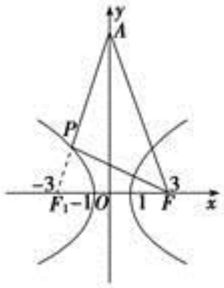
当点P在双曲线左支上运动时，由双曲线定义知$|PF|-|PF_1|=2a=2$，

$\therefore |PF|=2+|PF_1|$，

从而▯APF的周长为$|AF+|AP|+|PF|=|AF|+|AP|+2+|PF_1|$，

因为$|AF|=\sqrt{3^2+(6\sqrt{6})^2}=15$为定值，所以当$|AP|+|PF_1|$最小时，$\triangle APF$的周长最小，

由图象可知，此时点P在线段AF_1与双曲线的交点处(如图所示)，



由题意可知直线AF_1的方程为$y=2\sqrt{6}x+6\sqrt{6}$，

由$\begin{cases} y=2\sqrt{6}x+6\sqrt{6} \\ x^2-\frac{y^2}{8}=1 \end{cases}$，得$y^2+6\sqrt{6}y-96=0$，

解得$y=2\sqrt{6}$或$y=-8\sqrt{6}$(舍去)，

所以$S_{\Delta APF}=S_{\Delta AF_1F}-S_{\Delta PF_1F}=\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{6}-\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{6}=12\sqrt{6}$.

故答案为 15；$12\sqrt{6}$.

例题讲解

例 1、【答案】解：(1)由 C 与 l 相交于两个不同的点，

故知方程组$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$有两个不同的实数解，消去 y 并整理得，$(1-a^2)x^2+2a^2x-2a^2=0$.①

即有$\begin{cases} 1-a^2\neq 0 \\ 4a^4+8a^2(1-a^2)>0 \end{cases}$，解得$0<a<\sqrt{2}$且$a\neq 1$，

$\because$双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}$，由于$0<a<\sqrt{2}$，且$a\neq 1$，

$\therefore e>\frac{\sqrt{6}}{2}$且$e\neq\sqrt{2}$；

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(0,1)$，由于$\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$，

$\therefore (x_1,y_1-1)=\frac{5}{12}(x_2,y_2-1)$，

即有$x_1=\frac{5}{12}x_2$，由于x_1，x_2都是方程①的根，且$1-a^2\neq 0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{-2a^2}{1-a^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{-2a^2}{1-a^2}$，

$\therefore \frac{17}{12}x_2=-\frac{2a^2}{a^2-1}$，$\frac{5}{12}x_2^2=\frac{-2a^2}{1-a^2}$，

消去x_2得：$\frac{2a^2}{a^2-1}=\frac{289}{60}$，

又$\because a>0$，

解得$a=\frac{17}{13}$.

【解析】本题考查双曲线的方程和性质，主要考查了离心率的范围和直线与圆锥曲线的位置关系，考查了学生综合分析问题和解决问题的能力，属于中档题.

(1)把直线与双曲线方程联立消去 y，利用判别式大于 0 和方程二次项系数不等于 0 求得 a 的范围，进而利用 a 和 c 的关系，用 a 表示出离心率，根据 a 的范围确定离心率的范围；

(2)设出 A,B,P 的坐标，根据$\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$求得$x_1$和$x_2$的关系式，利用韦达定理表示出$x_1+x_2$和$x_1x_2$，联立方程求得 a.

例 2、【答案】(1)解：由题意得$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\\ \frac{b}{a}=\sqrt{3}\end{cases}$

解得$a=1$，$b=\sqrt{3}$，

$\therefore$双曲线 C 的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

(2)证明：设$A(x_0,y_0)$，由双曲线的对称性，可得$B(-x_0,-y_0)$.

设$P(x,y)$，则$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}$，

$\because y_0^2=3x_0^2-3$，$y^2=3x^2-3$，

所以$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=3$;

(3)解：由(1)得点F_1为(2,0)，

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 方程$y=k(x-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

将方程$y=k(x-2)$与双曲线方程联立消去 y 得：$(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2+3}{k^2-3}$，

假设 x 轴上存在定点$M(m,0)$，使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$恒成立，

则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-m)(x_2-m)+$

$[k(x_1-2)][k(x_2-2)]$

$=(k^2+1)x_1x_2-(2k^2+m)(x_1+x_2)+m^2+4k^2$

$=\frac{(m^2-4m-5)k^2-3(m^2-1)}{k^2-3}=0$，

故得：$(m^2-4m-5)k^2-3(m^2-1)=0$对任意的$k^2>3$恒成立，

$\therefore\begin{cases}m^2-4m-5=0\\m^2-1=0\end{cases}$，解得$m=-1$，

$\therefore$当点 M 为$(-1,0)$时，$MA\perp MB$恒成立；

当直线 l 的斜率不存在时，由$A(2,3)$，$B(2,-3)$知点$M(-1,0)$使得$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$也成立.

$\therefore$综上所述，在 x 轴上存在点$M(-1,0)$满足题意.

巩固练习

1.【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查双曲线的几何性质，属于中档题.

根据题意，由双曲线的定义分析可得$|PF_1|-|PF_2|=2a$，又由$|PF_1|=4|PF_2|$，则$|PF_2|=\frac{2a}{3}$，

由双曲线的几何性质分析可得$\frac{2a}{3}+\frac{8a}{3}\geq 2c$，变形可得 e 的范围.

【解答】

解：根据题意，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$中，点 P 在双曲线的右支上，

则$|PF_1|-|PF_2|=2a$，又由$|PF_1|=4|PF_2|$，

则$|PF_2|=\frac{2a}{3}$，$|PF_1|=\frac{8a}{3}$，又$|PF_1|+|PF_2|\geq|F_1F_2|$，

则有$\frac{2a}{3}+\frac{8a}{3}\geq 2c$，

即可得：$e\leq\frac{5}{3}$，

则双曲线的离心率取值范围为$(1,\frac{5}{3}]$.

故选 B.

2.【答案】C

【解析】

【试题解析】

【分析】

本题考查直线与双曲线的位置关系，中点弦问题，利用点差法是解题的关键，属于中档题.

设这条弦的两端点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{36}-\frac{y_1^2}{9}=1\\\frac{x_2^2}{36}-\frac{y_2^2}{9}=1\end{cases}$，两式相减，又由弦中点为$(4,2)$，可得 k，由此可求出这条弦所在的直线方程.

【解答】

解：弦所在直线的斜率显然存在，设这条弦的两端点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，斜率为$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，

则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{36}-\frac{y_1^2}{9}=1\\\frac{x_2^2}{36}-\frac{y_2^2}{9}=1\end{cases}$，

两式相减再变形得$\frac{x_1+x_2}{36}-k\frac{y_1+y_2}{9}=0$，

又弦中点为$(4,2)$，故$k=\frac{1}{2}$，

故这条弦所在的直线方程$y-2=\frac{1}{2}(x-4)$，整理得$x-2y=0$；

故选：C.

3.【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查了双曲线的性质，切线方程的求解，属于中档题.

根据双曲线的渐近线和切线的方程得出 k 的范围.

【解答】

解：双曲线的渐近线方程为$y=\pm x$，

$\therefore$当$-1<k\leq 1$时，直线与双曲线的右支只有 1 个交点，

当$k\leq -1$时，直线与双曲线右支没有交点，

把$y=kx-1$代入$x^2-y^2=4$得：$(1-k^2)x+2kx-5=0$，

令$\Delta=4k^2+20(1-k^2)=0$，

解得$k=\frac{\sqrt{5}}{2}$或$k=-\frac{\sqrt{5}}{2}$(舍).

$\therefore 1<k<\frac{\sqrt{5}}{2}$时直线与双曲线的右支有 2 个交点.

故答案选 D.

4.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查双曲线的定义和标准方程，属于基础题.

设动圆 M 的半径为 r，依题意有$|MB|=r$，另设$A(4,0)$，根据两圆相切得到$|MA|=r\pm 4$，

即$|MA|-|MB|=\pm 4$，符合双曲线的定义，即可得到答案.

【解答】

解：设动圆 M 的半径为 r，依题意有$|MB|=r$，

另设$A(4,0)$，则有$|MA|=r\pm 4$，

即$|MA|-|MB|=\pm 4$，

亦即动圆圆心 M 到两定点 A、B 的距离之差的绝对值等于常数 4，

又$4<|AB|$，因此动点 M 的轨迹为双曲线，

且$c=4$，$2a=4$，

$\therefore a=2$，$a^2=4$，$b^2=c^2-a^2=12$，

故动圆圆心 M 的轨迹方程是$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

故选 C.

5.【答案】B

【解析】

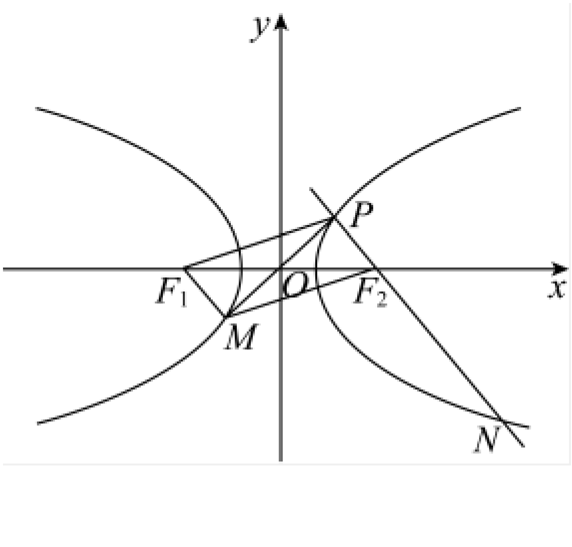
【分析】

本题考查双曲线 C 的离心率，考查余弦定理，考查学生的计算能力，属于中档题.

由题意，$|PF_1|=2|PF_2|$，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，可得$|PF_1|=4a$，$|PF_2|=2a$，由$\angle MF_2N=120°$，可得$\angle F_1PF_2=120°$，由余弦定理可得$4c^2=16a^2+4a^2-2\cdot 4a\cdot 2a\cdot cos120°$，即可求出双曲线 C 的离心率.

【解答】

解：如图所示，



$|PF_1| = 2|PF_2|$，$|PF_1| - |PF_2| = 2a$，

$\therefore |PF_1| = 4a$，$|PF_2| = 2a$，

由双曲线的对称性可知$|PO| = |MO|$，

又$\because |F_1O| = |F_2O|$，

$\therefore$四边形PF_1MF_2为平行四边形．

$\because \angle MF_2N = 120°$，$\therefore \angle F_1PF_2 = 120°$，

由余弦定理可得$4c^2 = 16a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 4a \cdot 2a \cdot cos120°$，

$\therefore c = \sqrt{7}a$，

$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{7}$.

故选 B.

6.【答案】B

【解析】解：设双曲线的左焦点为F_1；

$\because A$，B关于原点对称，

$\therefore$四边形$AFBF_1$为矩形；

$\therefore \angle AF_1F = \angle ABF$；

设$\angle AF_1F = \alpha$，

$\therefore AF_1 = 2ccos\alpha$，$AF = 2csin\alpha$；

由双曲线的定义可得：$|AF_1 - AF| = 2a$；

$\therefore e = \frac{1}{|\cos\alpha - \sin\alpha|} = \frac{1}{|\sqrt{2}\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})|}$；

$\because \alpha \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}]$，

$\therefore \alpha + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}]$；

$\therefore \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}]$，

$\therefore e \in [\sqrt{2}, \sqrt{3} + 1]$；

故选：B.

利用$\angle AF_1F$表示出AF_1，AF的值，再通过双曲线的定义$|AF_1-AF|=2a$，代入AF_1，AF的值得出离心率e的表达式，在求出其范围即可.

本题考查了双曲线的性质，考查了学生的转化能力，计算能力；属于中档题.

7.【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】

本题考查椭圆与双曲线的简单性质，属于中档题.

由题意，根据椭圆和双曲线的定义，设$|PF_1|=t$，则$|PF_2|=s$，由P同时在椭圆和双曲线上，得到$\begin{cases}t+s=2a\\t-s=2m\end{cases}$，所以$\begin{cases}t=a+m\\s=a-m\end{cases}$，结合$PM\perp x$轴，$|OM|=\frac{2}{3}|OF_2|=\frac{2}{3}c$，由两个直角三角形边长关系答案可求.

【解答】

解： 由题意可设$|PF_1|=t$，则$|PF_2|=s$，

由P同时在椭圆和双曲线上，得到$\begin{cases}t+s=2a\\t-s=2m\end{cases}$，所以$\begin{cases}t=a+m\\s=a-m\end{cases}$,

由$PM\perp x$轴，$|OM|=\frac{2}{3}|OF_2|=\frac{2}{3}c$，

得到$(a+m)^2-\left(c+\frac{2}{3}c\right)^2=(a-m)^2-\left(\frac{1}{3}c\right)^2$，整理得到$am=\frac{2}{3}c^2$，

所以椭圆和双曲线的离心率之积为：$\frac{c}{a}\times\frac{c}{m}=\frac{3}{2}$.

故答案为$\frac{3}{2}$.

8.【答案】$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】

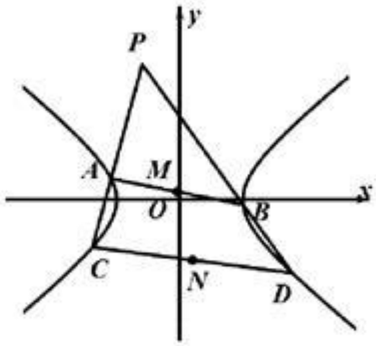
本题考查双曲线的性质和几何意义，直线与双曲线的位置关系的综合应用，考查转化思想

以及计算能力，是中档题.

利用点差法可表示出y_M，y_N，由平行关系易知 P，M，N 三点共线，从而利用斜率相等的关系构造方程，代入y_M，y_N，整理可得 a，b 关系，利用双曲线$c^2=a^2+b$ ，得到关系 a，c 的齐次方程，进而求得离心率.

【解答】

解：如图



设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点$M(x_M,y_M)$，

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_M}{y_M}=-\frac{1}{8}$,

$$\therefore y_M=-\frac{8b^2}{a^2}\cdot x_M \ldots ①$$

设$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，线段 CD 的中点$N(x_N,y_N)$，

同理可得：$y_N=-\frac{8b^2}{a^2}\cdot x_N \ldots ②$

$\because k_{AB}=k_{CD}$ $\therefore AB//CD$，易知 P，M，N 三点共线，

$\therefore \frac{y_M-2}{x_M+1}=\frac{y_N-2}{x_N+1}$，将①②代入得：$\frac{-\frac{8b^2}{a^2}\cdot x_M-2}{x_M+1}=\frac{-\frac{8b^2}{a^2}\cdot x_N-2}{x_N+1}$，即$(x_M-x_N)\cdot\left(1-\frac{4b^2}{a^2}\right)=0$，

$\therefore a^2=4b^2=4(c^2-a^2)$，即$4c^2=5a^2$，

$\therefore e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

故答案为$\frac{\sqrt{5}}{2}$

9.【答案】$\sqrt{3}$

【解析】解：(法1)：$\because AD\perp BF_1$，$DF_1=BD$，$\therefore AF_1=AB=\frac{2b^2}{a}$，

又$\because |AF_2|=\frac{b^2}{a}$，$\therefore |AF_1|-|AF_2|=\frac{b^2}{a}=2a$，则$c^2-a^2=2a^2$，解得$c=\sqrt{3}a$，

所以$e=\sqrt{3}$；

(法2)：由条件可知$A(c,\frac{b^2}{a})$，$B(c,-\frac{b^2}{a})$，则$D(0,-\frac{b^2}{2a})$，

所以$\overrightarrow{AD}=(-c,-\frac{3b^2}{2a})$，$\overrightarrow{F_1B}=(2c,-\frac{b^2}{a})$，

$\because AD\perp BF_1$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{F_1B}=0$，即$-2c^2+\frac{3b^4}{2a^2}=-2c^2+\frac{3(c^2-a^2)^2}{2a^2}=0$，

解得$e^2=3$，$\therefore e=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$.

提供两种方法：(法1)根据条件表示$|AF_2|=\frac{b^2}{a}$，且$|AF_1|=\frac{2b^2}{a}$，根据双曲线定义可得$c^2-a^2=2a^2$，解得$c=\sqrt{3}a$，即可得到e；

(法2)利用坐标表示 A、B、D，利用向量法得到$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{F_1B}=0$，即$-2c^2+\frac{3b^4}{2a^2}=-2c^2+\frac{3(c^2-a^2)^2}{2a^2}=0$，解得$e^2=3$.

本题考查双曲线的定义，考查双曲线离心率求法，属于基础题.

10【答案】2

【解析】

【分析】

本题考查双曲线的离心率的求法，是中档题，解题时要认真审题，注意点差法的合理运用.

联立$\begin{cases}y=-x+1\\x-2y=0\end{cases}$，得到线段 AB 的中点为$(2,-6)$，设直线 AB 与$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的交点分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，利用点差法能求出双曲线的离心率.

【解答】

解：联立$\begin{cases}y=x-8\\x-2y-14=0\end{cases}$，得$x=2$，$y=-6$，

$\therefore$直线$y=x-8$与$x-2y-14=0$的交点为$M(2,-6)$，$\therefore$线段 AB 的中点为$(2,-6)$，

$\therefore$直线 AB 的方程为$y+6=-(x-2)$.

设直线 AB 与$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的交点分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=-12$，

分别把$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$代入双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，得：

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减，

得$\frac{(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2)}=-1\times\frac{-12}{4}=\frac{b^2}{a^2}$，

$\therefore\frac{b^2}{a^2}=3$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+3}=2$.

故答案为 2.

11.【答案】解：(1)依题意，可得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\sqrt{5}\\\frac{2}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\c^2=a^2+b^2\end{cases}$解得$a=1$，$b=2$，$c=\sqrt{5}$，

所以双曲线 C 的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设直线 l 的方程为$y=kx+1$，由$\begin{cases}y=kx+1\\4x^2-y^2=4\end{cases}$，

可得$(4-k^2)x^2-2kx-5=0$，由$\Delta>0$，可得$4k^2+4(4-k^2)\times5>0$，

解得$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$.设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由根与系数的关系可得$x_1+x_2=\frac{2k}{4-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-5}{4-k^2}$，

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{4k^2}{(4-k^2)^2}+\frac{20}{4-k^2}}=4\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{5-k^2}{(4-k^2)^2}}$，

原点 O 到直线 l 的距离为$d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，所以$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=2\sqrt{\frac{5-k^2}{(4-k^2)^2}}$，

由$S_{\triangle OAB}=\frac{4}{3}$，得$2\sqrt{\frac{5-k^2}{(4-k^2)^2}}=\frac{4}{3}$，

即$4k^4-23k^2+19=0$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$，±1，

故直线 l 的斜率$k=\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$，±1.

【解析】【试题解析】

本题主要考查了双曲线的概念及标准方程，双曲线的性质及几何意义，直线与双曲线的位置关系，点到直线的距离，三角形面积公式的应用，属于基础题.

(1)由已知列出方程组$\begin{cases}\frac{c}{a}=\sqrt{5}\\ \frac{2}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$，解出即可得解.

(2)设直线 l 的方程为$y=kx+1$,与双曲线方程联立并利用韦达定理表示出x_1+x_2和x_1x_2，表示出$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$，$O$ 到直线 l 的距离为$d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，然后计算$\triangle OAB$的面积即可.

12.【答案】解：(1)设双曲线C_2的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，

则$a^2=4-1=3$，$c^2=4$，再由$a^2+b^2=c^2$，得$b^2=1$，

故C_2的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$；

(2)将$y=kx+\sqrt{2}$ 代入$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，得$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$.

由直线 l 与双曲线C_2交于不同的两点，

得$\begin{cases} 1-3k^2 \neq 0 \\ \Delta=(-6\sqrt{2}k)^2+36(1-3k^2)=36(1-k^2)>0 \end{cases}$，

$\therefore k^2 \neq \frac{1}{3}$ 且$k^2<1$，①，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}$ ，$x_1x_2=\frac{-9}{1-3k^2}$.

$$\therefore x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+\sqrt{2})(kx_2+\sqrt{2})$$

$=(k^2+1)x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)+2=\frac{3k^2+7}{3k^2-1}$.

又$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$ ，得$x_1x_2+y_1y_2>2$，

$\therefore \frac{3k^2+7}{3k^2-1}>2$ ，即$\frac{-3k^2+9}{3k^2-1}>0$ ，

解得$\frac{1}{3}<k^2<3$， ②，

由①②得$\frac{1}{3}<k^2<1$ ，

故 k 的取值范围为$(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$.

【解析】【试题解析】

本题考查了双曲线方程的求法，考查了直线与双曲线的位置关系，属于较难题.

(1)设双曲线C_2的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，进行求解即可；

(2)将$y=kx+\sqrt{2}$ 代入$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，得$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$，即可求解.