江苏省仪征中学2020-2021学年第一学期高二数学

周末练习（9）　　　2020.12.5

一、选择题（本大题共8小题，共40.0分）

1.　已知两个向量$\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(4,m,n)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，则$m+n$的值为(　)

A. -4　　B. 4　　C. -8　　D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查了空间向量共线定理、方程的解法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

由$\vec{a}//\vec{b}$，则存在实数k使得$\vec{a}=k\vec{b}$，即可得出．

【解答】

解：$\because \vec{a}//\vec{b}$，

$\therefore$存在实数k使得$\vec{a}=k\vec{b}$，

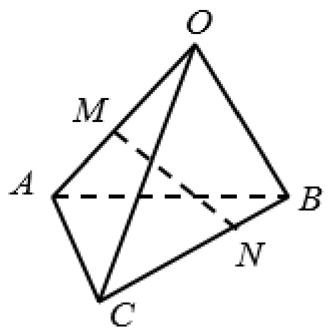
$$\therefore\begin{cases}2=4k\\-1=km\\3=kn\end{cases},$$

解得$k=\frac{1}{2}$，$m=-2$，$n=6$，

则$m+n=4$．

故选B．

2.　如图，空间四边形$OABC$中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，点$M$是$OA$的中点，点$N$在$BC$上，且$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NB}$，设$\overrightarrow{MN}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$，则$x$，$y$，$z$的值为(　)



A. $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】

考查向量的加减运算，空间向量的基本定理等，属于基础题．

利用向量的加法，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}$，利用中点公式代入．

【解答】

解：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}$，

$\overrightarrow{MO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$，

所以$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，

故选：C．

3. 命题“$\forall x\in[1,2],x^2-a\leq 0$”为真命题的一个充分不必要条件是(   )

A. $a\geq 4$　　B. $a\leq 4$　　C. $a\geq 5$　　D. $a\leq 5$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查充要条件的判断，考查不等式的恒成立问题，属基础题．

首先解出命题“$\forall x\in[1,2],x^2-a\leq 0$”为真命题时候 a 的范围，然后根据充分性和必要性的定义得到结果．

【解答】

解：因为命题“$\forall x\in[1,2],x^2-a\leq 0$”为真命题，

所以$a\geq 4$，

$a\geq 5$是$a\geq 4$的充分不必要条件，正确；

$a\leq 4$是$a\geq 4$的既不充分也不必要条件，错误；

$a\geq 4$是$a\geq 4$的充要条件，错误；

$a\leq 5$是$a\geq 4$的既不充分也不必要条件，错误；

故选 C．

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=120$，则$2a_{10}-a_{12}$的值为(   )

A. 20　　B. 22　　C. 24　　D. 26

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查等差数列性质，属于基础题．

由已知得$a_8=24$，所以$2a_{10}-a_{12}=a_8+a_{12}-a_{12}=a_8=24$．

【解答】

解：由已知，得$5a_8=120$，

所以$a_8=24$，

所以$2a_{10}-a_{12}=a_8+a_{12}-a_{12}=a_8=24$．

5. 已知三个数 1，a，9 成等比数列，则圆锥曲线$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{2}=1$的离心率为(　)．

A. $\sqrt{5}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{5}$或$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{\sqrt{10}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查椭圆、双曲线的方程以及简单性质，并且考查了等比数列的性质，也考查分类讨论的数学思想方法，是中档题．

由已知求得 a 值，然后分类讨论求得圆锥曲线$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{2}=1$的离心率．

【解答】

解：∵三个数 1，a，9 成等比数列，

$\therefore a^2=9$，则$a=\pm 3$．

当$a=3$时，曲线方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，表示椭圆，则长半轴长为$\sqrt{3}$，半焦距为 1，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$;

当$a=-3$时，曲线方程为$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{3}=1$，表示双曲线，则实半轴长为$\sqrt{2}$，半焦距为$\sqrt{5}$，离心率为$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选：D.

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右顶点为 A,B,点 P 为双曲线上异于 A，B 的任意一点，设直线 PA，PB 的斜率分别为k_1，k_2，若$k_1k_2=\frac{1}{2}$，则双曲线的离心率为(　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】解：由题设知，$A(-a,0)$，$B(a,0)$，设$P(x,y)$，

则$k_1=\frac{y}{x+a}$，$k_2=\frac{y}{x-a}$，$\therefore k_1k_2=\frac{y}{x+a}\cdot\frac{y}{x-a}=\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}$，

$\because P(x,y)$在双曲线上，$\therefore y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$，

则$\frac{\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}$，化简得，$2b^2=a^2$，又$b^2=c^2-a^2$，

$\therefore 2c^2=3a^2$，则$e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选：C.

利用斜率公式以及 P 在双曲线上，$k_1k_2=\frac{1}{2}$列方程组可解得$2c^2=3a^2$，从而可得离心率.

本题考查了双曲线的性质，属中档题.

7. 公元前 5 世纪，古希腊哲学家芝诺发表了著名的阿基里斯悖论：他提出让乌龟在阿基里斯前面 1000 米处开始，和阿基里斯赛跑，并且假定阿基里斯的速度是乌龟的 10 倍.当比赛开始后，若阿基里斯跑了 1000 米，此时乌龟便领先他 100 米；当阿基里斯跑完下一个 100 米时，乌龟仍然前于他 10 米.当阿基里斯跑完下一个 10 米时，乌龟仍然前于他 1 米……，所以，阿基里斯永远追不上乌龟.根据这样的规律，若阿基里斯和乌龟的距离恰好为10^{-2}米时，乌龟爬行的总距离为( )

A. $\frac{10^4-1}{90}$　　B. $\frac{10^5-1}{900}$　　C. $\frac{10^5-9}{90}$　　D. $\frac{10^4-9}{900}$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查等比数列的实际应用，属于基础题.由乌龟每次爬行的距离构成公比为$\frac{1}{10}$等比数列，利用等比数列的求和公式求解即可.

【解答】

解：根据条件，乌龟每次爬行的距离构成等比数列，公比为$\frac{1}{10}$，

当阿基里斯和乌龟的速度恰好为10^{-2}米时，乌龟爬行的总距离为

$$100+10+\ldots+10^{-2}=\frac{100\left(1-\frac{1}{10^5}\right)}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10^5-1}{900}.$$

故选 B.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 F 是抛物线$x^2=4y$的焦点，过点 F 作两条相互垂直的直线l_1，l_2，l_1，l_2分别与抛物线交于点 A，B 和 C，D，记 AB 的中点为 M，CD 的中点为 N，则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的最小值是(　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查直线与抛物线的位置关系，中点坐标公式，属于中档题.

联立直线 AB 与抛物线的方程，求出 M 的坐标，同理求出 N 的坐标，再利用平面向量的数量积以及基本不等式求出最小值即可.

【解答】

解：设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，焦点$F(0,1)$，

由题意，直线l_1，l_2的斜率都存在且不为 0，

可设直线 AB 的方程为$y=kx+1$，

把直线 AB：$y=kx+1$代入$x^2=4y$，

得$x^2-4kx-4=0$，

可知：$\Delta>0$，

$\therefore x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=2k,y_M=2k^2+1$，

同理可得，$x_N=-\frac{2}{k},y_N=\frac{2}{k^2}+1$，

$$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=2k\times\left(-\frac{2}{k}\right)+(2k^2+1)\left(\frac{2}{k^2}+1\right)$$

$$=2\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)+1$$

$\geq 2\times 2\sqrt{k^2\cdot\frac{1}{k^2}}+1=5$，当且仅当$k=\pm1$时取等号.

所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的最小值是 5，

故选 C.

二、不定项选择题（本大题共 4 小题，共 16.0 分）

9. 下列各结论中正确的是(　)

A. “$xy>0$” 是 “$\frac{x}{y}>0$” 的充要条件

B. “$\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$” 的最小值为 2

C. 命题“$\forall x>1$，$x^2-x>0$”的否定是“$\exists x_0\le 1$，$x_0^2-x_0\le 0$”

D. “函数$y=ax^2+bx+c$的图象过点$(1,0)$”是“$a+b+c=0$”的充要条件

【答案】AD

【解析】

【分析】

本题考查充要条件、全称量词命题、存在量词命题的否定及真假判定，属于中档题．

根据充要条件的判断方法可确定A、D选项，由基本不等式可确定B选项，再由全称量词命题的否定是存在量词命题可确定C选项．

【解答】

解：对于A，$\mathrm{xy}>0$可知，$y\ne 0$，则不等式两边同时除以y^2，即$\frac{\mathrm{xy}}{y^2}>\frac{0}{y^2}$，$\therefore \frac{x}{y}>0$，过程可逆，所以是充要条件，$A$正确；

对于B，$\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\ge 2$，当且仅当$\sqrt{x^2+9}=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$，解得$x^2=-8$，无解，所以等号不成立，所以取不到 2，$B$错误；

对于C，因为全称量词命题的否定是存在量词命题，所以命题“$\forall x>1$，$x^2-x>0$”的否定是“$\exists x_0>1$，${x_0}^2-x_0\leqslant 0$”，所以C错误．

对于D，对于函数$y=ax^2+bx+c$而言，将$(1,0)$代入，得$a+b+c=0$，充分性得证；反之，$a+b+c=0$说明$x=1$是方程$ax^2+\mathrm{bx}+c=0$的根，即$(1,0)$是函数$y=ax^2+\mathrm{bx}+c$经过的点，必要性得证，故D正确．

故选AD．

10. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_n=2a_n-2$，若存在两项a_m，a_n，使得$a_ma_n=64$，则下列结论正确的是(　　)

A. 数列$\{a_n\}$为等比数列

B. 数列$\{a_n\}$为等差数列

C. $m+n$为定值

D. 设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，$b_n=\log_2 a_n$，则数列$\{\frac{T_n}{n}\}$为等差数列

【答案】ACD

【解析】

【分析】

本题主要考查由S_n和a_n的关系求数列的通项公式，等比数列通项公式的应用以及等差数列的判定，考查学生转化能力和计算能力，属于中档题.

先根据递推关系$S_n=2a_n-2$，得出$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，说明数列$\{a_n\}$为等比数列，排除选项 B; 由$a_m a_n=2^m 2^n=2^{m+n}=64=2^6$，可知选项 C 正确，$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$，所以$T_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，$\frac{T_n}{n}=\frac{n+1}{2}$，所以数列$\{\frac{T_n}{n}\}$为等差数列，故 D 正确；

【解答】

解：由题意，当$n=1$时，$S_1=2a_1-2$，解得$a_1=2$，

当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$，

所以$S_n-S_{n-1}=a_n=2a_n-2-(2a_{n-1}-2)=2a_n-2a_{n-1}$，

所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，数列$\{a_n\}$是以首项$a_1=2$，公比$q=2$的等比数列，$a_n=2^n$，

故选项 A 正确，选项 B 错误；

$a_m a_n=2^m 2^n=2^{m+n}=64=2^6$，所以$m+n=6$为定值，故选项 C 正确.

$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$，所以$T_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，$\frac{T_n}{n}=\frac{n+1}{2}$，所以数列$\{\frac{T_n}{n}\}$为等差数列，故 D 正确；

故选：ACD.

11. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的中心为 O，则下列结论中正确的有(　)

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$是一对相反向量

B. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OD_1}$是一对相反向量

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}$是一对相反向量

D. $\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}$是一对相反向量

【答案】ACD

【解析】

【分析】

本题考查空间向量的概念和加、减运算，属于基础题.

利用条件，对选项逐个判断即可.

【解答】

解：$\because O$为正方体的中心，

$\therefore \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC_1}$，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB_1}$，故$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=-(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})$，

同理可得$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OD_1})$，故$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$=-(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1})$，

$\therefore AC$ 正确；

$\because \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{D_1A_1}$，

$\therefore \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OD_1}$是两个相等的向量，

$\therefore B$不正确；

$\because \overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{C_1C}=-\overrightarrow{AA_1}$，

$\therefore \overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}=-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1})$，

$\therefore D$ 正确.

故选 ACD.

12. M、F 分别是椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$上的动点和右焦点，定点$A(1,0)$，$B(1,1)$，则下面选项正确的有(　)

A. $|MA|$的最小值是$2\sqrt{2}-1$

B. $|MA|$的最大值是$2\sqrt{2}+1$

C. $|MF|+|MB|$最小值是$4\sqrt{2}-\sqrt{10}$

D. $\triangle MBF$的面积最大值是$\sqrt{3}-1$

【答案】BC

【解析】

【分析】

本题考查了直线与椭圆的位置关系、圆锥曲线中的面积问题、圆锥曲线中的范围与最值问题，先求得$|MA|=\sqrt{\frac{1}{2}(x-2)^2+3}$，故可判断 AB，

设左焦点为F'，由

$|MF|+|MB|=2a-|MF'|+|MB|=2a-(|MF'|-|MB|)\geqslant 2a-|F'B|$ 可判断 C，

求得 M 到 FB 的距离的最大值，故可判断 D.

【解答】

解：$|MA|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+4-\frac{x^2}{2}}=\sqrt{\frac{x^2}{2}-2x+5}=\sqrt{\frac{1}{2}(x-2)^2+3}$

因为$-2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}$，当$x=2$时，得$|MA|$最小值$\sqrt{3}$

当$x=-2\sqrt{2}$时，得$|MA|$最大$2\sqrt{2}+1$，所以A错误，B正确；

设左焦点为F'，因为$|MF|+|MF'|=2a$，所以

$|\mathrm{MF}|+|\mathrm{MB}|=2\mathrm{a}-|\mathrm{MF'}|+|\mathrm{MB}|=2\mathrm{a}-(|\mathrm{MF'}|-|\mathrm{MB}|)\ge 2\mathrm{a}-|\mathrm{F'B}|=4\sqrt{2}-\sqrt{10}$，所以$C$正确；

直线FB的方程为$x+y-2=0$，

设与FB平行且与椭圆相切的直线l为$x+y+c=0$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\x+y+c=0\end{cases}$得$3x^2+4cx+2c^2-8=0$

$\Delta=8(12-c^2)$，令$\Delta=0$，得$c=\pm2\sqrt{3}$，取$c=2\sqrt{3}$时l与FB的距离比较大，此时$d=\frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}}$，

所以$\triangle MBF$面积最大值为$\frac{1}{2}|BF|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot d=\sqrt{3}+1$所以$D$不正确.

故选BC.

三、填空题（本大题共4小题，共20.0分）

13. 若x，y都是正实数，且$2x+8y-xy+9=0$，则xy的最小值为________.

【答案】81

【解析】

【分析】

本题考查利用基本不等式求最值，属于基础题.

由题意，可得$2x+8y\ge 8\sqrt{xy}$，可得$8\sqrt{xy}-xy+9\le 0$，即可求出结果.

【解答】

解：由题意，x，y都是正实数，且$2x+8y-xy+9=0$，

所以$2x+8y\ge 8\sqrt{xy}$，当且仅当$x=4y$时，等号成立，

所以$8\sqrt{xy}-xy+9\le 0$，

解得$\sqrt{xy}\ge 9$，

即$xy \geq 81$，

所以 xy 的最小值为 81．

故答案为 81．

14. 已知数列$\{a_n\}$满足：$3a_1+3^2a_2+3^3a_3+\cdots+3^na_n=n(n\in N^*)$，则数列$\left\{\frac{1}{\log_3 a_n \cdot \log_3 a_{n+1}}\right\}$的前 n 项和S_n为________．

【答案】$\frac{n}{n+1}$

【解析】

【分析】

本题主要考查了数列的通项公式、数列求和，以及裂项相消法，属于中等题，把握裂项相消法是本题解题的关键．

由题设条件$3a_1+3^2a_2+3^3a_3+\ldots+3^na_n=n$得$3a_1+3^2a_2+3^3a_3+\ldots+3^{n-1}a_{n-1}=n-1$，两式相减化为$a_n=\frac{1}{3^n}$，则$\frac{1}{\log_3^{a_n}\cdot\log_3^{a_{n+1}}}=\frac{1}{n(n+1)}$，由裂项相消法($\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$)容易得到$S_n$的值．

【解答】

解：$\because 3a_1+3^2a_2+3^3a_3+\ldots+3^na_n=n$，

$\therefore 3a_1+3^2a_2+3^3a_3+\ldots+3^{n-1}a_{n-1}=n-1$，

$\therefore 3^na_n=1$，

$\therefore a_n=\frac{1}{3^n}$，

$$\therefore \frac{1}{\log_3 a_n \cdot \log_3 a_{n+1}}=\frac{1}{\log_3 3^{-n}\cdot\log_3 3^{-(n+1)}}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$\therefore S_1+S_2+\ldots+S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

故答案为$\frac{n}{n+1}$.

15. 已知椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线$N$：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$.若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，则椭圆 M 的离心率为________；双曲线 N 的离心率为________.

【答案】$\sqrt{3}-1$；2

【解析】

【分析】

本题考查椭圆和双曲线的简单性质，考查计算能力，属于中档题.

根据题意，可得正六边形的一个顶点$(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2})$，代入椭圆方程，求出椭圆的离心率；再根据双曲线渐近线斜率求出双曲线离心率即可.

【解答】

解：椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，双曲线 N：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$，

若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，

又椭圆的一个焦点为$(c,0)$，可得正六边形的一个顶点$(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2})$，

可得：$\frac{c^2}{4a^2}+\frac{3c^2}{4b^2}=1$，可得$\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4(\frac{1}{e^2}-1)}=1$，可得$e^4-8e^2+4=0$，$e\in(0,1)$，

解得$e=\sqrt{3}-1$.

同时，双曲线的渐近线的斜率为$\sqrt{3}$，即$\frac{n}{m}=\sqrt{3}$，

可得：$\frac{n^2}{m^2}=3$，即$\frac{m^2+n^2}{m^2}=4$，

可得双曲线的离心率为$\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}=2$.

故答案为：$\sqrt{3}-1$；2.

16. 已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，直线$l:y=kx+b(k\neq 0)$与抛物线 C 交于 A，B 两点，且$|AF|+|BF|=6$，线段 AB 的垂直平分线过点$M(0,4)$，则抛物线 C 的方程是________；若直线 l 过点 F，则$k=$________.

【答案】$x^2=4y$； $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】

本题考查抛物线的几何性质，抛物线方程的求法，直线与抛物线的位置关系，属中档题.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$|AF|+|BF|=6$得$y_1+y_2=6-p$，又$|MA|=|MB|$，解得$p=2$，

然后联立$\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+1\end{cases}$，得$y_1+y_2=4k^2+2$，求出 k，由此可得结论.

【解答】

解：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由抛物线定义可知$|AF|=y_1+\frac{p}{2}$，$|BF|=y_2+\frac{p}{2}$，

则$|AF|+|BF|=y_1+y_2+p=6$，即$y_1+y_2=6-p$，

因为点$M(0,4)$在线段 AB 的垂直平分线上，所以$|MA|=|MB|$，

即$x_1^2+(y_1-4)^2=x_2^2+(y_2-4)^2$，结合$x_1^2=2py_1$，$x_2^2=2py_2$，

可消去x_1，x_2并化简得$(y_1-y_2)(y_1+y_2+2p-8)=0$，

易知$y_1\neq y_2$，故$y_1+y_2=8-2p$，即$8-2p=6-p$，解得$p=2$，

故抛物线 C 的方程为$x^2=4y$，

因直线 l 过点$F(0,1)$，故可设其方程为$y=kx+1$，

联立$\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+1\end{cases}$并整理可得$x^2-4kx-4=0$，

其中$\Delta=16k^2+16>0$恒成立，

由韦达定理得$x_1+x_2=4k$，

故$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$，

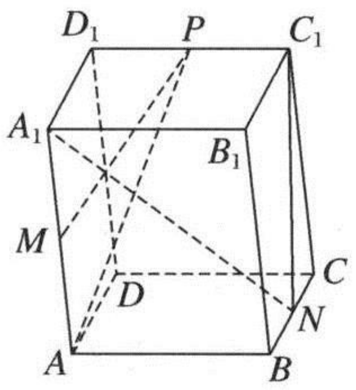
又$y_1+y_2=6-p=4$，

故$4k^2+2=4$，$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故答案为$x^2=4y$ ；$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分）

17. 如图所示，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，设$\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，$M$，$N$，$P$ 分别是AA_1，BC，C_1D_1的中点，试用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$表示以下各向量：



(1) $\overrightarrow{AP}$; (2) $\overrightarrow{A_1N}$; (3) $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}$.

【答案】.解 (1) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1P}$

$=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

$$(2)\ \overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AN}$$

$$=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

$$(3)\ \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}=(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1P})+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CC_1})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$$

$$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AA_1}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$.

【解析】略

18. 已知幂函数$f(x)=(3m^2-2m)x^{m-\frac{1}{2}}$在$(0,+\infty)$上单调递增，$g(x)=x^2-4x+t$.

(1)求实数 m 的值；

(2)当$x\in[1,9]$时，记$f(x)$，$g(x)$的值域分别为集合 A，B，设命题 p：$x\in A$，命题 q：$x\in B$，若命题 q 是命题 p 的必要不充分条件，求实数 t 的取值范围.

【答案】解：(1)因为$f(x)=(3m^2-2m)x^{m-\frac{1}{2}}$是幂函数，

所以$3m^2-2m=1$，

解得$m=1$或$m=-\frac{1}{3}$，

当$m=1$时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，在$(0,+\infty)$上单调递增，满足题意，

当$m=-\frac{1}{3}$时，$f(x)=x^{-\frac{5}{6}}$，在$(0,+\infty)$上单调递减，不符合条件，

则$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，

故$m=1$.

(2)当$x\in[1,9]$时，$A=[1,3]$，$B=[t-4,t+45]$，

因为命题 p 是命题 q 的充分不必要条件，

所以$A\subsetneqq B$，

所以$\begin{cases}t-4\le 1,\\ t+45\ge 3,\end{cases}$解得$-42\le t\le 5$，

所以，实数 t 的取值范围是$[-42,5]$.

【解析】本题主要考查了幂函数的性质定义，以及集合的运算，属于基础题.

(1)根据幂函数的定义和性质即可求出 m 的值，

(2)先求出$A=[1,3]$，$B=[t-4,t+45]$，因为命题 p 是命题 q 的充分不必要条件，所以$A\subsetneqq B$，得到关于 t 的不等式组，求解即可.

19. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$(n+2)a_{n+1}=(n+3)a_n+n^2+5n+6(n\in N*)$.

(1)证明：$\{\frac{a_n}{n+2}\}$为等差数列；

(2)设$b_n=\frac{1}{a_n}(n\in N*)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n.

【答案】(1)证明：数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$(n+2)a_{n+1}=(n+3)a_n+n^2+5n+6(n\in N*)$.

整理得：$\frac{a_{n+1}}{n+3}-\frac{a_n}{n+2}=1$(常数)，

所以数列$\{\frac{a_n}{n+2}\}$是以$\frac{a_1}{1+2}=1$为首项，1 为公差的等差数列.

(2)解：由(1)得：$\frac{a_n}{n+2}=1+(n-1)=n$，

解得：$a_n=n(n+2)$.

所以$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$.

所以：$S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

【解析】本题考查的知识要点，数列的定义的应用，裂项相消法在数列求和中的应用，主要考查学生的运算能力和转换能力及思维能力，属于中档题型．

(1)根据递推关系得到$\frac{a_{n+1}}{n+3}-\frac{a_n}{n+2}=1$，利用定义即可证明．

(2)利用(1)的应用求出数列的通项公式，进一步利用裂项相消法在数列求和中的应用求出结果．

20. 已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，倾斜角为$45°$的直线 l 过点 F 与抛物线 C 交于 A，B 两点，且$|AB|=8$．

(1)求 p；

(2)设点E为直线$x=\frac{p}{2}$与抛物线C在第一象限的交点，过点E作C的斜率分别为k_1，k_2的两条弦 EM，EN，如果$k_1+k_2=-1$，证明直线 MN 过定点，并求出定点坐标．

【答案】解：(1)抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

则直线 l 的方程为$y=x-\frac{p}{2}$，

代入抛物线方程得$x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，

设$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，

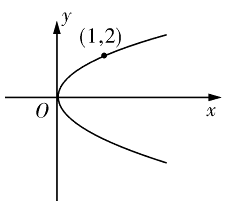
所以$x_A+x_B=3p$，

根据抛物线定义$|AF|=x_A+\frac{p}{2}$，$|BF|=x_B+\frac{p}{2}$，

所以$|AB|=|AF|+|BF|=x_A+x_B+p=4p=8$，

所以$p=2$；

(2)由(1)知，抛物线方程为$y^2=4x$，直线$x=\frac{p}{2}$，即$x=1$，解得$E(1,2)$，



$1°$当 MN 斜率不存在时，设方程为$x=t$，

则$M(t,2\sqrt{t})$，$N(t,-2\sqrt{t})$，

则$k_1+k_2=\frac{2\sqrt{t}-2}{t-1}+\frac{-2\sqrt{t}-2}{t-1}=-1$，

解得$t = 5$；

2°当 MN 斜率存在时，设 MN：$y = kx + b(k \neq 0)$，

由$\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 4x \end{cases}$，得$k^2x^2 + (2kb - 4)x + b^2 = 0$，

则$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{4-2kb}{k^2} \\ x_1x_2 = \frac{b^2}{k^2} \end{cases}$，

所以$k_1 = \frac{y_1-2}{x_1-1} = \frac{kx_1+b-2}{x_1-1} = k + \frac{b+k-2}{x_1-1}$，$k_2 = k + \frac{b+k-2}{x_2-1}$，

则$k_1 + k_2 = 2k + (b + k - 2) \cdot \frac{x_1+x_2-2}{(x_1-1)(x_2-1)} = -1$，

化简得：$b = -5k - 6$，

此时 MN：$y = k(x - 5) - 6$，过定点$(5, -6)$，

综上，直线 MN 过定点$(5, -6)$．

【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系的综合应用，直线系方程的应用，考查分析问题解决问题的能力，属于中档题．

(1)根据抛物线的性质和根与系数的关系，即可求出；

(2)通过联立直线与抛物线方程，利用韦达定理并结合条件可求出直线 MN 过定点．

21．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n = n^2 - 2n$，．

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)设$b_n = 2^n \cdot a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n；

(Ⅲ)在(Ⅱ)的条件下，若$T_n \leq \lambda \cdot 2^{n+1} \cdot (2n - 4) \cdot (2n + 4) + 10$对任意$n \geq 3(n \in N^*)$恒成立，求$\lambda$的取值范围．

【答案】解：(Ⅰ)已知$S_n = n^2 - 2n$．

当$n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= n^2 - 2n - [(n - 1)^2 - 2(n - 1)]$$

$$= 2n - 3;$$

当$n = 1$时，$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1$，也适合上式．

$$\therefore a_n = 2n - 3;$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$b_n = 2^n \cdot (2n - 3)$，

所以$T_n=2\times(-1)+2^2\times1+2^3\times3+2^4\times5+$

$\cdots+2^{n-1}\times(2n-5)+2^n\times(2n-3)$，①;

$2T_n=2^2\times(-1)+2^3\times1+2^4\times3+2^5\times5+\cdots+2^n(2n-5)+2^{n+1}\times(2n-3)$． ②

①－②，可得$-T_n=-2+2\times(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-3)\cdot2^{n+1}$

$$=-2+2\times\frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-2^{n+1}\times(2n-3)$$

$=-10+2^{n+1}\cdot(-2n+5)$.

则$T_n=10+2^{n+1}\cdot(2n-5)$；

(Ⅲ)要使$T_n\leq\lambda\cdot2^{n+1}\cdot(2n-4)(2n+4)+10$对任意$n\geq3(n\in N^*)$恒成立，

只需$\lambda\geq\frac{2n-5}{(2n-4)(2n+4)}$.设$2n-5=t(t\geq1,t\in N^*)$.

则$g(t)=\frac{t}{(t+1)(t+9)}=\frac{t}{t^2+10t+9}(t\geq1,t\in N^*)$

则只需$\lambda\geq g(t)_{max}$在$t\geq1$，$t\in N^*$恒成立即可，

$$g(t)=\frac{t}{t^2+10t+9}$$

$=\frac{1}{t+\frac{9}{t}+10}\leq\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{9}{t}}+10}\leq\frac{1}{16}$,

当且仅当$t=\frac{9}{t}$，即$t=3$时(此时$n=4$)等号成立，

所以$\lambda\geq\frac{1}{16}$.故λ的取值范围为$[\frac{1}{16},+\infty)$.

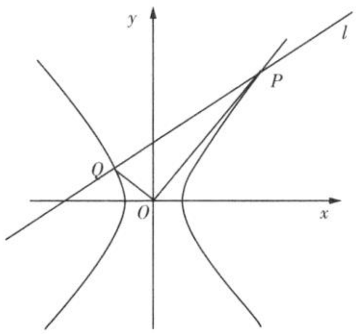
【解析】本题考查了数列与不等式的综合应用，属于中档题.

(Ⅰ)利用S_n求解数列通项，注意验证$n=1$是否满足；

(Ⅱ)根据错位相减法求和；

(Ⅲ)分离常数后利用基本不等式求最值即可解题.

22. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$O$为坐标原点，离心率$e=2$，点$M(\sqrt{5},\sqrt{3})$在双曲线上.



(1)求双曲线的方程;

(2)如图，若直线 l 与双曲线的左、右两支分别交于点 Q，P，且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求$|OP|^2+|OQ|^2$的最小值.

【答案】解：(1)因为$e=\frac{c}{a}=2$，所以$c=2a$，$b^2=c^2-a^2=3a^2$.

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$，即$3x^2-y^2=3a^2$.

因为点$M(\sqrt{5},\sqrt{3})$在双曲线上，所以$15-3=3a^2$，所以$a^2=4$.

所以所求双曲线的方程为$3x^2-y^2=12$.

(2)设直线 OP 的方程为$y=kx(k\neq 0)$，则直线 OQ 的方程为$y=-\frac{1}{k}x$，

由$\begin{cases}3x^2-y^2=12\\y=kx\end{cases}$，得$\begin{cases}x^2=\frac{12}{3-k^2},\\y^2=\frac{12k^2}{3-k^2}\end{cases}$

所以$|OP|^2=x^2+y^2=\frac{12(k^2+1)}{3-k^2}$.

同理可得，$|OQ|^2=\frac{12(1+\frac{1}{k^2})}{3-\frac{1}{k^2}}=\frac{12(k^2+1)}{3k^2-1}$，

所以$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{3-k^2+(3k^2-1)}{12(k^2+1)}=\frac{2+2k^2}{12(k^2+1)}=\frac{1}{6}$.

设$|OP|^2+|OQ|^2=t$，

则$t\cdot(\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2})=2+(\frac{|OQ|}{|OP|})^2+(\frac{|OP|}{|OQ|})^2\geq 2+2=4$，

所以$t\geq\frac{4}{\frac{1}{6}}=24$，即$|OP|^2+|OQ|^2\geq 24$(当且仅当$|OP|=|OQ|=2\sqrt{3}$时取等号).

所以当$|OP|=|OQ|=2\sqrt{3}$时，$|OP|^2+|OQ|^2$取得最小值 24.

【解析】本题考查双曲线的标准方程，考查直线与双曲线的位置关系，考查学生的计算能力，属于中档题.

(1)利用双曲线的离心率$e=2$，点$M(\sqrt{5},\sqrt{3})$在双曲线上，建立方程，结合$c^2=a^2+b^2$，即可求得双曲线的方程；

(2)因为$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，所以 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$，设直线 OQ 的方程为$y=kx$，则直线 OP 的方

程为$y=-\frac{1}{k}x$，分别代入双曲线方程，即可得P，Q的坐标用含k的式子表示，再代入$|OP|^2+|OQ|^2$，化简，利用均值不等式求最值即可.