2019 年全国高中数学联合竞赛一试试题（A 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分。

1. 已知正实数 a 满足 $a^a=(9a)^{8a}$，则 $\log_a(3a)$ 的值为________.

2. 若实数集合 $\{1,2,3,x\}$ 的最大元素与最小元素之差等于该集合的所有元素之和，则 x 的值为________.

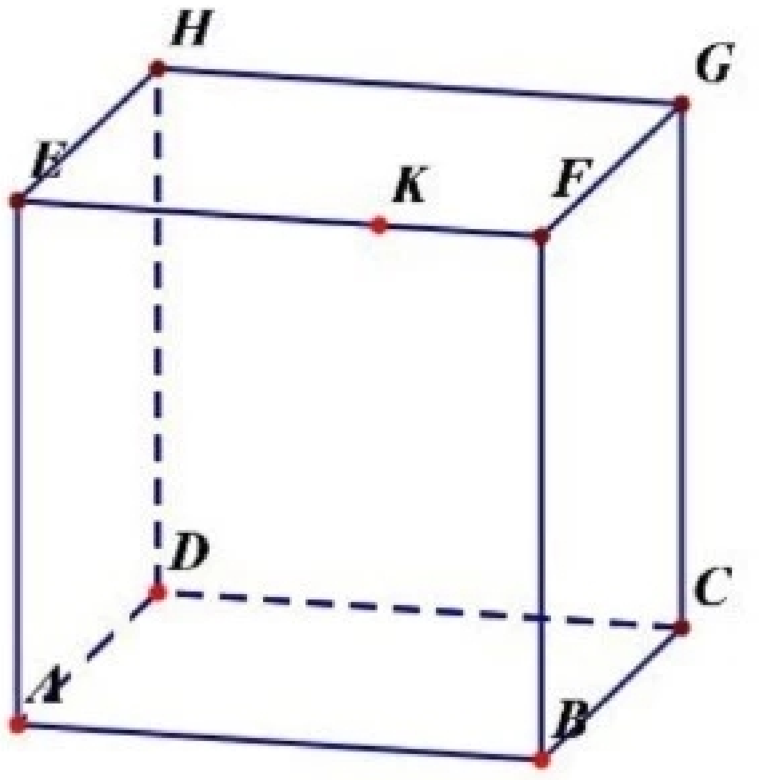
3. 平面直角坐标系中，$\vec{e}$ 是单位向量，向量 $\vec{a}$ 满足 $\vec{a}\bullet\vec{e}=2$，且 $|\vec{a}|^2\le 5|\vec{a}+t\vec{e}|$ 对任意实数 t 成立，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围为________.

4. 设 A,B 为椭圆 Γ 的长轴顶点，E,F 为 Γ 的两个焦点，$|AB|=4,\ |AF|=2+\sqrt{3}$，P 为 Γ 上一点，满足 $|PE|\cdot|PF|=2$，则 ΔPEF 的面积为________.

5. 在 1，2，3，...，10 中随机选出一个数 a，在-1，-2，-3，...，-10 中随机选出一个数 b，则 a^2+b 被 3 整除的概率为________.

6. 对任意闭区间 I，用 M_I 表示函数 $y=\sin x$ 在 I 上的最大值.若正数 a 满足 $M_{\{0,a\}}=2M_{\{a,2a\}}$，则 a 的值为________.

7. 如图，正方体 $ABCD-EFGH$ 的一个截面经过顶点 A,C 及棱 EF 上一点 K，且将正方体分成体积比为 $3:1$ 的两部分，则 $\dfrac{EK}{KF}$ 的值为________.



8. 将 6 个数 2,0,1,9,20,19 按任意次序排成一行，拼成一个 8 位数（首位不为 0），则产生的不同的 8 位数的个数为________.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9.（本题满分 16 分）在 ΔABC 中， $BC=a, CA=b, AB=c.$ 若 b 是 a 与 c 的等比中项，且 $\sin A$ 是 $\sin(B-A)$ 与 $\sin C$ 的等差中项，求 $\cos B$ 的值。

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，圆 Ω 与抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 恰有一个公共点，且圆 Ω 与 x 轴相切与 Γ 的焦点 F ，求圆 Ω 的半径。

11.（本题满分 20 分）称一个复数数列 $\{z_n\}$ 为“有趣的”，若 $\left|z_1\right|=1$，且对任意正整数 n ，均有 $4z_{n+1}^2+2z_n z_{n+1}+z_n^2=0$ ，求最大的常数 C ，使得对一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m ，均有 $\left|z_1+z_2+\ldots\ldots+z_m\right| \geq C$.

2019 年全国高中数学联合竞赛一试试题（A 卷）答案

一、填空题

1. $\dfrac{9}{16}$

$$a^{a}=(9a)^{8a}\Leftrightarrow a=8a\log_{a}9a$$

由$\therefore \log_{a}9a=\dfrac{1}{8}\Rightarrow \log_{a}9=-\dfrac{7}{8}\Rightarrow \log_{a}3=-\dfrac{7}{16}$

$$\therefore \log_{a}3a=\log_{a}3+1=\frac{9}{16}$$

2. $-\dfrac{3}{2}$

由题意知，x 为负值，$\therefore 3-x=1+2+3+x\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

3. $[\sqrt{5},2\sqrt{5}]$

设$|a|=x$,原题转化为$x^{4}\le 25(x^{2}+t^{2}+4t)$

$\Rightarrow 25(t^{2}+4t)\ge x^{4}-25x^{2}\Leftrightarrow -100\ge x^{4}-25x^{2}$

$\Rightarrow 5\le x^{2}\le 20\Rightarrow \sqrt{5}\le |a|\le 2\sqrt{5}$

4、1

由题意知该椭圆可设为$\dfrac{x^{2}}{4}+y^{2}=1$。$\therefore PF+PE=4,EF=2\sqrt{3}$,由余弦定理，

$PF^{2}+PE^{2}-2PE\cdot PF\cos\angle\mathrm{EPF}=\mathrm{EF}^{2}\Rightarrow 12-4\cos\angle\mathrm{EPF}=12$

所以$\cos\angle\mathrm{EPF}=0$，$\sin\angle\mathrm{EPF}=1\Rightarrow S_{\triangle\mathrm{PEF}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PE}\cdot\mathrm{PF}\cos\angle\mathrm{EPF}=1$

5、$\dfrac{37}{100}$

若$a\in\{1,2,4,5,7,8,10\}$, $a^{2}=1 \bmod 3$

若$a^{2}+b\equiv 0 \bmod 3\Rightarrow \mathrm{b}\equiv -1 \bmod 3\Rightarrow \mathrm{b}\in\{-1,-4,-7,-10\}$

若$a\in\{3,6,9\}$ $\qquad a^{2}\equiv 0 \bmod 3$

若$a^{2}+b\equiv 0 \bmod 3\Rightarrow a\equiv 0 \bmod 3\Rightarrow b\in\{-3,-6,-9\}$

$\therefore$ a^2+b 为 3 的倍数的概率为 $\dfrac{7\times4+3\times3}{100}=\dfrac{37}{100}$

6. $\dfrac{5\pi}{6}$ 或 $\dfrac{13\pi}{12}$

由图像分析得 $a=\dfrac{5\pi}{6}$ 或者 $2a=\dfrac{13\pi}{6}$

7. $\dfrac{KF}{EF}=k$ 截面与 FG 交于 J

$V_{ABCKFJ}=V_{ABCF}+V_{AKFJ}+V_{AFJC}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}k^2+\dfrac{1}{6}k=\dfrac{1}{4}$

$k^2+k=\dfrac{1}{2},2k^2+2k-1=0,$ 解得 $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},k=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}$（舍去）

$\dfrac{EK}{KF}=\dfrac{2-(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}$.

8、解析：

所有首位非 0 的 8 位数：$6!-5!$

2、0 相邻的不同 8 位数：$\dfrac{5!}{2}$

1、9 相邻的不同 8 位数：$\dfrac{5!-4!}{2}$

2、0 与 1、9 均相邻的不同 8 位数：$\dfrac{4!}{2!2!}$

故所求的 8 位数个数为：$(6!-5!)-\dfrac{5!}{2}-\dfrac{5!-4!}{2}+\dfrac{4!}{2!2!}=498$

二、解答题

9、由题意 $ac=b^2$

$2\sin A=\sin(B-A)+\sin C=\sin(B-A)+\sin(B+A)=2\sin B\cos A$，

整理即 $\sin B=\tan A$

对 $ac=b^2$ 利用正弦定理并结合三项的等差数列得 $\sin A\sin C=\sin^2 B=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$，即

$\sin A=\sin C\cos^2 A$

于是

$\tan A=\sin C\cos A=\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

即 $\sin A\cos C=0$， $C=\dfrac{\pi}{2}$

$\sin B=\tan A=\cot B=\dfrac{\cos B}{\sin B},\cos B=\sin^2 B=1-\cos^2 B$， 令 $\cos B=x$， 则

$x^2+x-1=0$，解得 $\cos B=x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

10、解析：

设圆的半径为 R，圆心为 $(1,R)$或$(-1,R)$，则圆的方程可写作 $(x-1)^2+(y-R)^2=R^2$

不妨设圆与抛物线相切于点 (x_0,y_0)，则过该切点 (x_0,y_0) 的切线方程为

以圆为对象，得 $(x-1)(x_0-1)+(y-R)(y_0-R)=R^2$

以抛物线为对象，得 $yy_0=2(x+x_0)$

于是可得 $\dfrac{2}{y_0}=-\dfrac{x_0-1}{y_0-R}$　　①

$\dfrac{2}{y_0}x_0=\dfrac{y_0R+x_0-1}{y_0-R}$　　②

又切点 (x_0,y_0) 在抛物线 $y^2=4x$ 上， $y_0{}^2=4x_0$　　③

由①得 $R=\dfrac{y_0+x_0y_0}{2}$， 由②得 $R=\dfrac{y_0+x_0y_0}{y_0{}^2+2x_0}=\dfrac{y_0+x_0y_0}{6x_0}$

于是解得 $x_0=\dfrac{1}{3}$， $y_0=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$， $R=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$， 故所求圆半径为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$。

【另解】

如图，l 为准线， F 为焦点， O 为圆心， S 为公共点， $FH\perp l$于H， $SG\perp l$于G，

ST平分$\angle GSF$，则由抛物线性质可得 $GS=FS,OS\perp ST$，从而 $\angle TSF=\angle TFS$

不妨设 $SF=x$，则由勾股定理及 $GH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}SF$ 知

$(2-x)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=x^2$，即 $\frac{3}{4}x^2-4x+4=0$，解得 $x=4$或$\frac{4}{3}$，又 $x<2$，故 $x=\frac{4}{3}$

$OS=\frac{\sqrt{3}}{3}$， $x=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

ΔSGT全等于ΔSFT，从而 $HT=\frac{1}{2}GT=\frac{1}{2}TF=\frac{2}{3}$，从而 $x=\frac{4}{3}$

11. 一方面，取 $z_1=1, z_{2n}=\omega, z_{2n+1}=\omega^2\,(n=1,2,\ldots)$，其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{3}$

则 $\lim\limits_{m\to\infty}|z_1+z_2+\ldots+z_m|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故$C_{\max}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$

另一方面，由条件可得 $z_{n+1}=\frac{z_n}{2}\omega^{\pm1}$，

不失一般性，可不妨设 $z_1=1$（否则可用 $z_i^{'}=\frac{z_i}{z_1}$代替z_i）

及 $z_2=\frac{\omega}{2}$（否则可用 $z_i^{'}=\overline{z_i}$ 代替 z_i）.

设 $z_n=\frac{\omega^{a_n}}{2^{n-1}}$,其中$a_1=0, a_2=1, a_n-a_{n-1}=\pm1(n=2,3,\ldots)$

记集合 $A_i=\{n\mid a_n\equiv i(\bmod 3), 1\leq n\leq m\}, i=0,1,2,\ldots$

并设 $A_2=\{u_1,u_2,\ldots,u_t\}$,其中$u_1<u_2<\ldots<u_t$

则 $u_1\geq3, u_i-u_{i-1}\geq2(i=2,3,\ldots,t)$

故 $u_i\geq2i+1(i=1,2,...,t)$

因此

$$
\begin{aligned}
&\left|z_1+z_2+\ldots+z_m\right| \\
&=\left|\frac{\sqrt{3}-i}{2} z_1+\frac{\sqrt{3}-i}{2} z_2+\ldots+\frac{\sqrt{3}-i}{2} z_m\right| \\
&\geq \operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2} z_1+\frac{\sqrt{3}-i}{2} z_2+\ldots+\frac{\sqrt{3}-i}{2} z_m\right) \\
&=\sum_{n \in A_0} \operatorname{Re} \frac{\sqrt{3}-i}{2^n}+\sum_{n \in A_1} \operatorname{Re} \frac{\sqrt{3}-i}{2^n} \frac{-1+\sqrt{3} i}{2}+\sum_{n \in A_2} \operatorname{Re} \frac{\sqrt{3}-i}{2^n} \frac{-1-\sqrt{3} i}{2} \\
&=\sum_{n \in A_0} \frac{\sqrt{3}}{2^n}+\sum_{n \in A_1} 0+\sum_{n \in A_2}-\frac{\sqrt{3}}{2^n} \\
&\geq \frac{\sqrt{3}}{2}-\sum_{n \in A_2} \frac{\sqrt{3}}{2^n} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^4}-\ldots\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

即 $C_{\max} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$