

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

周末练习 (6)

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分)

1. 命题 “ $\forall x \geq 0, 2 - x^2 \leq 2$ ” 的否定为 ()
- A. $\forall x \geq 0, 2 - x^2 > 2$ B. $\exists x \geq 0, 2 - x^2 > 2$
- C. $\forall x < 0, 2 - x^2 > 2$ D. $\exists x < 0, 2 - x^2 > 2$
2. 下列不等式中与不等式 $\frac{x-3}{2-x} \geq 0$ 同解的是同解的是 ()
- A. $(x-3)(2-x) \geq 0$ B. $(x-3)(2-x) > 0$
- C. $\frac{2-x}{x-3} \geq 0$ D. $\frac{3-x}{x-2} \geq 0$
3. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a+b=2$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 ()
- A. 4 B. 6 C. 8 D. 2
4. 已知 P 是椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上任一点, O 是坐标原点, 则 OP 中点的轨迹方程为 ()
- A. $4x^2 + 2y^2 = 1$ B. $2x^2 + y^2 = 1$ C. $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ D. $2x^2 + 4y^2 = 1$
5. 如图是某省从 3 月 1 日至 3 月 31 日的新冠肺炎每日新增确诊病例变化曲线图.



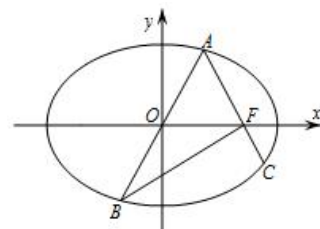
- 若该省从 3 月 1 日至 3 月 31 日的新冠肺炎每日新增确诊人数按日期顺序排列构成数列 $\{a_n\}$, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列有关数列 $\{S_n\}$ 说法中正确的是 ()
- A. 数列 $\{S_n\}$ 为先增后减数列 B. 数列 $\{S_n\}$ 为递增数列
- C. 数列 $\{S_n\}$ 的最大项是 S_{12} D. 数列 $\{S_n\}$ 的最大项是 S_{31}
6. 已知命题 p : “ $\exists x \in R$, 使得 $mx^2 + mx + m - 1 \geq 0$ ” 为假命题, q : $m < 0$, 则命题 p 是命题 q 的 () 条件.

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

7. 如图, A, B, C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的三个点, AB

经过原点 O , AC 经过右焦点 F , 若 $BF \perp AC$ 且 $|BF| = 3|CF|$, 则
该椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$



8. 设 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k} = 1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 P 满足 $\angle APB = 120^\circ$,

则 k 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{2}{3}] \cup [6, +\infty)$ B. $(0, \frac{4}{3}] \cup [12, +\infty)$ C. $(0, \frac{2}{3}] \cup [12, +\infty)$ D. $(0, \frac{4}{3}] \cup [6, +\infty)$

二、不定项选择题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

9. 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 的左、右焦点, M 为 C 上一点且在第一象限, 若 $\triangle MF_1F_2$

为等腰三角形, 则下列结论正确的是 ()

- A. $MF_1 = 2$ B. $MF_2 = 2$ C. 点 M 的横坐标为 $\frac{8}{3}$ D. $S_{\triangle MF_1F_2} = \sqrt{35}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S , $a_1 = 1$, $S_{n+1} = S_n + 2a_n + 1$, 数列 $\left\{ \frac{2^n}{a_n \cdot a_{n+1}} \right\}$ 的

前 n 项和为 T_n , $n \in \mathbf{N}^*$, 则下列选项正确的为 ()

- A. 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等差数列 B. 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列
C. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n + 1$ D. $T_n < 1$

11. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a > 0)$ 有且只有一个零点, 则 ()

- A. $a^2 - b^2 \leq 4$ B. $a^2 + \frac{1}{b} \geq 4$
C. 若不等式 $x^2 + ax - b < 0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则 $x_1 x_2 > 0$
D. 若不等式 $x^2 + ax + b < c$ 的解集为 (x_1, x_2) , 且 $|x_1 - x_2| = 4$, 则 $c = 4$.

12. 已知点 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + y^2 = 1$ 上的动点, Q 是圆 $D: (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ 上的动点,

点 $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ 则 ()

- A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$
B. 椭圆 C 中以 M 为中点的弦所在直线方程为 $6x + 24y - 11 = 0$
C. 圆 D 在椭圆 C 的内部

D. PQ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 当 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，方程 $x^2 \sin \alpha + y^2 \cos \alpha = 1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则 α 的取值范围为_____.

14. 设椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点. 在 $\triangle ABF_2$ 中，若有两边之和为 10，则第三边的长度为_____.

15. 已知 x, y 为正实数，则 $\frac{x}{x+2y} + \frac{2x+y}{x}$ 的最小值为_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4, a_n = 2a_{n-1} + 2^n (n \geq 2, n \in N^*)$ ，若不等式 $2n^2 - n - 3 < (5 - \lambda)a_n$ 对任意 $n \in N^*$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 求符合下列要求的曲线的标准方程：

(1) 已知椭圆的焦点在 x 轴，且长轴长为 12，离心率为 $\frac{1}{2}$;

(2) 已知椭圆过点 $(2\sqrt{2}, 2), (-2, \sqrt{6})$.

18. 已知 $p: \{x | (x+2)(x-10) \leq 0\}$, $q: \{x | 1-m \leq x \leq 1+m, m > 0\}$.

(1) 若 $m=1$ ，则 p 是 q 的什么条件？

(2) 若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n = 1 - a_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

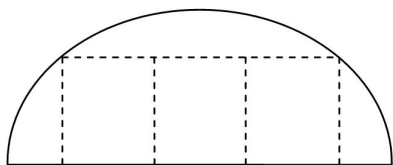
(2) 设 $c_n = 4a_n + 1$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n . [来源:学.科.网]

20. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 不等式 $f(x) > -2x$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$.

(I) 若方程 $f(x) = 2a$ 有两个相等正根, 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 若 $f(x)$ 的最大值为正数, 求 a 的取值范围.

21. 某高速公路隧道设计为单向三车道, 每条车道宽 4 米, 要求通行车辆限高 5 米, 隧道全长 1.5 千米, 隧道的断面轮廓线近似地看成半个椭圆形状(如图所示).



(1) 若最大拱高 h 为 6 米, 则隧道设计的拱宽 l 至少是多少米?

(2) 如何设计拱高 h 和拱宽 l , 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小? (结果取整数)

参考数据: 椭圆的面积公式为 $S = \pi ab$, 其中 a 、 b 分别为椭圆的长半轴和短半轴长.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 ,

F_2 ,

且两焦点 F_1 , F_2 与椭圆的短轴顶点 $(0, 1)$ 构成直角三角形.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 已知直线 l_1 , l_2 过右焦点 F_2 , 且它们的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$, 设 l_1 , l_2 分别与椭圆交于点 A ,

B 和 C , D .

① 求 $AB + CD$ 的值;

② 设 AB 的中点 M , CD 的中点为 N , 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

答案

1. B 2. D 3. D 4. A 5. D 6. B 7. B 8. B

9. BCD 10. BD 11. ABD 12. ABC

13. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 14. 6 15. $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 16. $(-\infty, \frac{37}{8})$

17. 【答案】

解: (1) 由已知条件可设所求的椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > b > 0$),

则 $2a = 12$, $\therefore a = 6$,

且离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $\therefore c = 3$,

$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 3^2 = 27$,

故所求的椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$;

(2) 设椭圆方程为 $mx^2 + ny^2 = 1$,

则有 $\begin{cases} 8m + 4n = 1 \\ 4m + 6n = 1 \end{cases}$, 解得 $m = \frac{1}{16}$, $n = \frac{1}{8}$,

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$;

18. 【答案】

(1) 因为 $p: \{x | -2 \leq x \leq 10\}$,

$q: \{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m, m > 0\} = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$,

显然 $\{x | 0 \leq x \leq 2\} \subset \{x | -2 \leq x \leq 10\}$,

所以 p 是 q 的必要不充分条件.

(2) 由 (1), 知 $p: \{x | -2 \leq x \leq 10\}$, 因为 p 是 q 的充分不必要条件,

所以 $\begin{cases} m > 0, \\ 1 - m \leq -2, \\ 1 + m \geq 10, \\ 1 - m = -2 \text{ 与 } 1 + m = 10 \text{ 不同时相等.} \end{cases}$

解得 $m \geq 9$, 即 $m \in [9, +\infty)$.

19. 【答案】

解: (1) 当 $n = 1$ 时, $S_1 = 1 - a_1$, 得 $a_1 = \frac{1}{2}$

当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_n = 1 - a_n$, ①

得 $S_{n-1} = 1 - a_{n-1}$, ②

①—②, 得 $2a_n = a_{n-1}$, 又 $a_1 = \frac{1}{2} \neq 0$, $\therefore a_n \neq 0$, $\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} (n \geq 2)$,

$\therefore \{a_n\}$ 是等比数列, $\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(2) 由 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 则 $c_n = 4a_n + 1 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$,

则 $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = 4(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + n$

$$= 4 \times \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + n = 4 + n - \frac{4}{2^n}.$$

20. 【答案】

解: (I) $\because$ 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 不等式 $f(x) > -2x$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$.

故 $ax^2 + (b+2)x + c > 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$, 故有 $\begin{cases} a < 0 \\ 1+3 = -\frac{b+2}{a} \\ 1 \times 3 = \frac{c}{a} \end{cases}$, 整理可得

$$\begin{cases} a < 0 \\ b = -4a - 2, \\ c = 3a \end{cases}$$

代入 $ax^2 + bx + c = 2a$ 可得 $ax^2 - (4a+2)x + a = 0$.

再根据此方程的判别式 $\Delta = (4a+2)^2 - 4a^2 = 0$, 求得 $a = -1$, 或 $a = -\frac{1}{3}$.

当 $a = -1$ 时, $b = 2$, $c = -3$, 此时, $f(x) = -x^2 + 2x - 3$, 满足条件.

当 $a = -\frac{1}{3}$ 时, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -1$, 此时, $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$, 此方程有 2 个负实数根,

不满足条件, 故舍去.

综上可得, $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

(II) 若 $f(x) = ax^2 - (4a+2)x + 3a$ ($a < 0$) 的最大值为正数, 则有 $\begin{cases} a < 0 \\ \frac{12a^2 - (4a+2)^2}{4a} > 0 \end{cases}$,

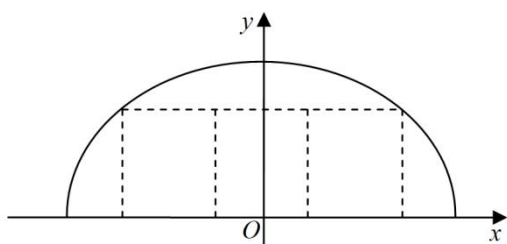
求得 $a < -2 - \sqrt{3}$, 或 $0 > a > -2 + \sqrt{3}$.

21. 【答案】

解: (1) 如图建立平面直角坐标系 xOy , 则点 $P(6,5)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上,

将 $b = h = 6$ 与点 $P(6,5)$ 代入椭圆方程得, $a = \frac{36}{\sqrt{11}}$, 所以 $l = 2a = \frac{72}{\sqrt{11}} = \frac{72\sqrt{11}}{11}$, 因此隧

道设计的拱宽 l 至少是 $\frac{72\sqrt{11}}{11}$ 米;



(2)由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 得, $\frac{36}{a^2} + \frac{25}{b^2} \leq 1$; 因为 $1 \geq \frac{36}{a^2} + \frac{25}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{36}{a^2} \cdot \frac{25}{b^2}} = \frac{60}{ab}$,

当且仅当 $\frac{6}{a} = \frac{5}{b}$ 时取等号, 所以 $ab \geq 60$;

所以隧道的土方工程量 $V = 1500S = 1500 \cdot \frac{1}{2} \pi ab \geq 45000\pi$, 当 V 取得最小值时, 有 $\frac{6}{a} = \frac{5}{b}$

且 $ab = 60$, 得 $a = 6\sqrt{2}$, $b = 5\sqrt{2}$, 故当拱高为 $5\sqrt{2}$ 米、拱宽为 $12\sqrt{2}$ 米时, 土方工程量最小.

22. 【答案】

解: (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. -----3 分

(2) ①设 AB 的直线方程为 $y = k(x-1)$.

联立 $\begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消元 y 并整理得 $(1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{2k^2-2}{1+2k^2}$,

于是 $AB = \sqrt{1+k^2}|x_1-x_2| = \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}k^2}{1+2k^2}$,

同理 $CD = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}(-\frac{1}{2k})^2}{1+2(-\frac{1}{2k})^2} = \frac{4\sqrt{2}k^2 + \sqrt{2}}{2k^2+1}$,

于是 $AB + CD = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}k^2}{1+2k^2} + \frac{4\sqrt{2}k^2 + \sqrt{2}}{2k^2+1} = 3\sqrt{2}$. -----7 分

②由①知 $x_M = \frac{2k^2}{1+2k^2}$, $y_M = \frac{-k}{1+2k^2}$, $x_N = \frac{1}{1+2k^2}$, $y_N = \frac{k}{1+2k^2}$,

所以 $M(\frac{2k^2}{1+2k^2}, \frac{-k}{1+2k^2})$, $N(\frac{1}{1+2k^2}, \frac{k}{1+2k^2})$,

所以 MN 的中点为 $T(\frac{1}{2}, 0)$,

于是 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OT \cdot |y_M - y_N| = \frac{1}{4} \left| \frac{2k}{1+2k^2} \right| = \frac{1}{2} \times \frac{|k|}{1+2k^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{|k|} + 2|k|} \leq \frac{\sqrt{2}}{8}$,

当且仅当 $2|k| = \frac{1}{|k|}$, 即 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 所以 $\triangle OMN$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{8}$. -----12 分