2021 高考数学模拟试卷（2）

南京师范大学《数学之友》

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1．本试卷共 6 页，包含选择题（共 12 题）、填空题（共 4 题）、解答题（共 6 题），满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将答题卡交回。

2．答题前，请您务必将自己的姓名、考试证号等用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔填写在答题卡上，并用 2B 铅笔正确填涂考试号。

3．作答试题必须用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔写在答题卡上的指定位置，在其它位置作答一律无效。

4．如有作图需要，可用 2B 铅笔作答，并请加黑、加粗，描写清楚。

一、选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|(x-1)^2<4，x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{-2，-1，0，1，2\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A. $\{-1，0，1，2\}$　　B. $\{0，1，2\}$　　C. $\{0，1\}$　　D. $\{1，2\}$

2．若复数 z_1，z_2 在复平面内对应的点关于 y 轴对称，且 $z_1=2-i$，则复数 $\dfrac{z_1}{z_2}=$（　　）

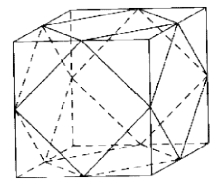
A．-1　　B．1　　C．$-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$　　D．$\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$

3.已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}$，$x+|x|\geq 0$，则 $\neg p$ 为(　　)

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0+|x_0|\leq 0$　　B. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0+|x_0|<0$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x+|x|\leq 0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x+|x|<0$

4.水晶是一种石英结晶体矿物，因其硬度、色泽、光学性质、稀缺性等，常被人们制作成饰品．如图所示，现有棱长为 $2\mathrm{cm}$ 的正方体水晶一块，将其裁去八个相同的四面体，打磨成某饰品，则该饰品的表面积为（单位：cm^2）(　　)



A. $12+4\sqrt{3}$　　B. $16+4\sqrt{3}$　　C. $12+3\sqrt{3}$　　D. $16+3\sqrt{3}$

5．某城市轨道交通 7 号线即将试运行，市轨道交通集团面向广大市民开展“参观体验，征求意见”活动，市民可以通过市地铁 APP 抢票，小陈抢到三张体验票，准备从小王，小张，小刘，小李中随机选择两位与自己一起去参加体验活动，则小王和小李至多一人被选中的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{6}$

6. 直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，AC＝BC＝2，点 P 是斜边 AB 上一点，且 BP＝2PA，则$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}$＝(　　)

A. －4　　B. －2　　C. 2　D. 4

7. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左焦点为$F$，$A$、$B$为双曲线的左、右顶点，渐近线上的一点$P$满足$|OP|=|OF|$，且$\angle APB=\frac{\pi}{3}$，则双曲线的离心率为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 已知$\alpha,\beta\in\left(0,\pi\right)$，$\alpha\neq\beta$，若$e^{\alpha}-e^{\beta}=\cos\alpha-2\cos\beta$，则下列结论一定成立的是()

A. $\cos\alpha>\cos\beta$　B. $\cos\alpha<\cos\beta$　C. $\sin\alpha>\sin\beta$　D. $\sin\alpha<\sin\beta$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $a^2+b^2=1$，则(　　)

A. $a+b\leqslant\sqrt{2}$　　B. $\frac{1}{2}<2^{a-b}<2$

C. $\log_2\sqrt{a}+\log_2\sqrt{b}\geqslant-\frac{1}{2}$　　D. $a^2-b^2>-1$

10. 引入平面向量之间的一种新运算“⊗”如下:对任意的向量 $\boldsymbol{m}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2, y_2)$，规定 $\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n}=x_1x_2-y_1y_2$，则对于任意的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，下列说法正确的有

A. $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}$　　B. $(\lambda\boldsymbol{a})\otimes\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})$

C. $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}|$　　D. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

11. 某港口一天 24h 内潮水的高度S（单位：m）随时间（单位：$h:0\leq t\leq 24$）的变化近似满足关系式$S\left(t\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{5\pi}{6}\right)$，则下列说法正确的有()

A. $S\left(t\right)$在$\left[0,2\right]$上的平均变化率为$\frac{3}{4}m/h$

B. 相邻两次潮水高度最高的时间间距为 24h

C. 当$t=6$时，潮水的高度会达到一天中最低

D. 18 时潮水起落的速度为$\frac{\pi}{8}m/h$

12．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}a_n=1+a_n$，$a_1=1$，设$b_n=\ln a_n(n\in\mathrm{N}^*)$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则下列选项正确的是（ln2≈0.693，ln3≈1.099）( )

A．数列$\{a_{2n-1}\}$单调递增，数列$\{a_{2n}\}$单调递减 B．$b_n+b_{n+1}\le\ln 3$

C．$S_{2020}>693$ D．$b_{2n-1}>b_{2n}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．$(x^3+1)(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^6$的展开式中$x^3$项的系数是______．（用数字作答）

14．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A$，右焦点为$F$，点$P$在直线$x=a$上，直线$PA$交椭圆于点$Q$，若$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QP}$，$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{QF}=0$，则椭圆$C$的离心率为_______．

15．托勒密是古希腊天文学家、地理学家、数学家，托勒密定理就是由其名字命名，该定理原文：圆的内接四边形中，两对角线所包矩形的面积等于一组对边所包矩形的面积与另一组对边所包矩形的面积之和．其意思为：圆的内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积．从这个定理可以推出正弦、余弦的和差公式及一系列的三角恒等式，托勒密定理实质上是关于共圆性的基本性质．已知四边形 ABCD 的四个顶点在同一个圆的圆周上，AC、BD 是其两条对角线，BD＝4，且△ACD为正三角形，则△ABC面积的最大值为________，四边形 ABCD 的面积为________.(注：圆内接凸四边形对角互补)

16．已知函数$f(x)=x^2+2ax$，$g(x)=4a^2\ln x+b$，设两曲线$y=f(x)$，$y=g(x)$有公共点P，且在点P处的切线相同，当$a\in(0,+\infty)$时，实数b的最大值是.

四、解答题:本题共6小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．(本小题满分10分)

已知△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且满足

$\cos^2B-\cos^2C-\sin^2A=-\sin A\sin B$.

(1) 求角C；

(2) 若$c=7$，__________________ (从下列问题中任选一个作答，若选择多个条件分别解答，则按选择的第一个解答计分).

①△ABC的面积为$6\sqrt{3}$，求△ABC的周长.

②△ABC的周长为21，求△ABC的面积.

18．(本小题满分 12 分)

设非常数数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+2}=\dfrac{\alpha a_{n+1}+\beta a_n}{\alpha+\beta}$，$n\in\mathbf{N}^*$，其中常数 α，β 均为非零实数，且 $\alpha+\beta\neq 0$.

（1）证明：数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是 $\alpha+2\beta=0$；

（2）已知 $\alpha=1$，$\beta=\dfrac{1}{4}$，$a_1=1$，$a_2=\dfrac{5}{2}$，求证：数列$\{|a_{n+1}-a_{n-1}|\}$ ($n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$)与数列$\{n+\dfrac{1}{2}\}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)中没有相同数值的项.

19．(本小题满分 12 分)

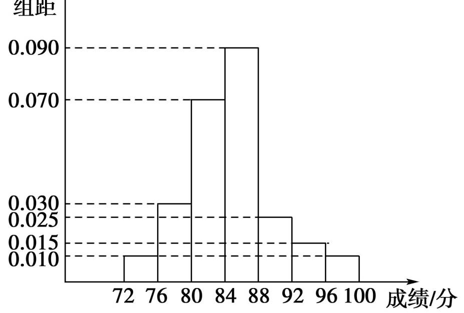
某市质监部门严把食品质量关，在 2020 年 3 月 15 日前夕，根据质量管理考核指标对本地的 500 家食品生产企业进行考核，通过随机抽样抽取其中的 50 家，统计其考核成绩(单位：分)，并制成如图频率分布直方图.

(1)求这 50 家食品生产企业考核成绩的平均数 x(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表)及中位数 a(精确到 0.01)

(2)该市质监部门打算举办食品生产企业质量交流会，并从这 50 家食品生产企业中随机抽取 4 家考核成绩不低于 88 分的企业发言，记抽到的企业中考核成绩在[92，100]的企业数为 X，求 X 的分布列与数学期望.

(3)若该市食品生产企业的考核成绩 X 服从正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$其中 μ 近似为 50 家食品生产企业考核成绩的平均数 x，σ^2 近似为样本方差为 s^2，经计算得 $s^2=27.68$，利用该正态分布，估计该市 500 家食品生产企业质量管理考核成绩高于 90.06 分的有多少家？(结果保留整数).

附参考数据与公式：$\sqrt{27.68}\approx 5.26$，$X\sim N(\mu，\sigma^2)$则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X<2\mu+\sigma)\approx 0.9545$.$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$.

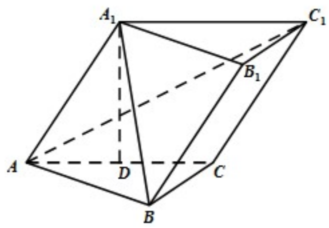


20．(本小题满分 12 分)

如图，已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=90°$，$AC=BC=2$，AC 的中点为 D，且 $A_1D\perp$ 平面 ABC，$A_1D=\sqrt{3}$.

（1）求证：$A_1B\perp AC_1$；

（2）在直线 CC_1 上找一点 M，使得直线 A_1B 与平面 MA_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$.



21．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-mx^2+m^2x(m\in\mathbf{R})$ 的导函数为 $f'(x)$.

(1) 若函数 $g(x)=f(x)-f'(x)$ 存在极值，求 m 的取值范围；

(2) 设函数 $h(x)=f'(e^x)+f'(lnx)$(其中 e 为自然对数的底数)，对任意 $m\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $h(x)\geqslant m^2+k^2$ 在 $(0，+\infty)$ 上恒成立，求正整数 k 的取值集合.

22．(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 内，已知抛物线 $y=x^2$ 的焦点为 F，P 为平面直角坐标系内的点，若抛物线 $y=x^2$ 上存在点 A，使得 $AF\perp AP$，则称 A 为 P 的一个“垂足点”.

（1）若 P 点有两个“垂足点”为 $M(1，1)$和 $N(2，4)$，求 P 点的坐标；

（2）是否存在 P 点，使得 P 点有且仅有三个不同的“垂足点”，且 P 点也是双曲线$\dfrac{y^2}{8}-\dfrac{x^2}{2}=1$ 上的点？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，说明理由.