高二数学中档题小练(21.3.23)

时间：45 分钟　　满分：86 分

范围：导数及其应用、复数、综合法求角和距离

一、单选题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

1．已知$z=1-i^{2020}$，则$|z+2i|=($　　　$)$

A. $\sqrt{10}$　　　　B. $2\sqrt{2}$　　　　C. 2　　　　D. $\sqrt{2}$

2．设函数 $f(x)=a\ln x+bx^2$，若函数 $f(x)$ 的图象在点(1，$f(1)$)处的切线方程为 $y=x$，则函数 $y=f(x)$ 的增区间为(　　　)

A．(0，1)　　　　B．(0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$)　　　　C．($\frac{\sqrt{2}}{2}$，1)　　　　D．($\frac{\sqrt{2}}{2}$，$+\infty$)

3．复数 z 满足 $2z+|z|=2i$，则 z 在复平面上对应的点位于(　　　)

A．第一象限　　　　B．第二象限　　　　C．第三象限　　　　D．第四象限

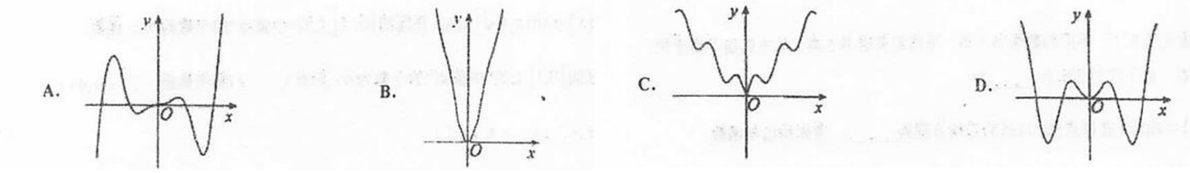
4．已知曲线 C_1：$f(x)=xe^x$ 在 $x=0$ 处的切线与曲线 C_2：$g(x)=\frac{a\ln x}{x}(a\in\mathbf{R})$ 在 $x=1$ 处的切线平行，令 $h(x)=f(x)g(x)$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上(　　　)

A．有唯一零点　　　　B．有两个零点　　　　C．没有零点　　　　D．不确定

5．在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M、N 分别是A_1B_1、CD 的中点，则点 B 到截面AMN的距离为(　)

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

6．我国著名数学家华罗庚先生曾说：数缺形时少直观，形缺数时难人微，数形结合百般好，隔裂分家万事休. 在数学的学习和研究中，常用函数的图像研究函数的性质，也常用函数的解析式来琢磨函数的图象特征，如函数$f(x)=x^2+x\sin x$的图象大致为(　　　)



二、多选题（共 2 题，每题 5 分，共 10 分：漏选得 2 分，错选或不选得 0 分）

7．任何一个复数 $z=a+bi$（其中 a、$b\in R$，i 为虚数单位）都可以表示成：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的形式，通常称之为复数 z 的三角形式.法国数学家棣莫弗发现：$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)(n\in N_+)$，我们称这个结论为棣莫弗定理.根据以上信息，下列说法正确的是(　　　)

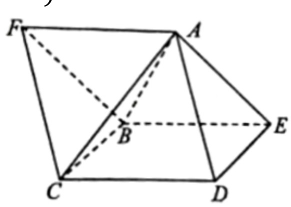
A．$|z^2|=|z|^2$　　　　B．当 $r=1$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，$z^3=1$

C．当 $r=1$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　　　D．当 $r=1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，若 n 为偶数，则复数 z^n 为纯虚数

8．1982 年美国数学学会出了一道题：一个正四面体和一个正四棱锥的所有棱长都相等，将正四面体的一个面和正四棱锥的一个侧面紧贴重合在一起，得到一个新几何体．中学生丹尼尔做了一一个如图所示的模型寄给美国数学学会，美国数学学会根据丹尼尔的模型修改了有关结论．对于该新几何体，则(　　　)

A．$AF//CD$　　　　B．$AF\perp DE$

C．新几何体有 7 个面　　　　D．新几何体的六个顶点不能在同一个球面上



三、填空题（共 2 题，每题 5 分，共 10 分）

9．设直线l与曲线$C_1: y=e^x$与$C_2: y=-\frac{1}{e^x}$均相切，切点分别为$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$y_1y_2=$ ________.

10．若函数$f(x)=ax-2x^2-\ln x$存在单调递增区间，则实数a的取值范围为________.

四、解答题（共 3 题，共 36 分）

11. 已知复数$z=1+mi(m\in R)$，$\frac{z-3}{1+2i}$是实数.

（1）求复数 z；

（2）若复数$z_0=\frac{1}{2}m+z-1$是关于 x 的方程$x^2+bx+c=0$的根，求实数 b 和 c 的值.

12．已知函数$f(x)=(ax^2+2x+2)e^x\ (a>0)$，其中$e$是自然对数的底数.

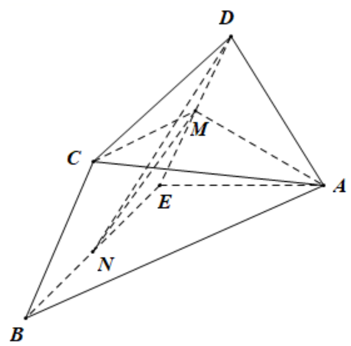
（1）若$f(x)$在$[-2,2]$上是单调增函数，求a的取值范围；

（2）证明：当$a=1$时，方程$f(x)=x+5$有且只有两个零点.

13．如图，四边形$BEDC$为正方形，$AE\perp BE$，$AE=BE$，$\triangle ADE$为锐角三角形，M，N分别是边DE，BE的中点，直线DE与平面ABE所成的角为$\frac{\pi}{3}$.

（1）求证：$DN\perp$平面ACM；

（2）若$\triangle ADE$为锐角三角形，求二面角$M-AC-B$的余弦值.



中档题小练参考答案(21.3.23)

1．C　2．D　3．B　4．A　5．B　6．B　7．AC　8．ABD

9．$-e^2$　10．$(4,+\infty)$

11.【解析】（1）因为 $z=1+mi(m\in R)$，

可得 $\dfrac{z-3}{1+2i}=\dfrac{mi-2}{1+2i}=\dfrac{(mi-2)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{2m-2}{5}+\dfrac{m+4}{5}i$，

又由 $\dfrac{z-3}{1+2i}$ 是实数，可得 $\dfrac{m+4}{5}=0$，解得 $m=-4$，所以 $z=1-4i$．

（2）因为 $z_0=\dfrac{1}{2}m+z-1=-2-4i$ 是方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in R)$ 的根，

所以 $(-4i-2)^2+b(-4i-2)+c=0$，即 $(16-4b)i-2b+c-12=0$，

可得 $\begin{cases}16-4b=0\\-2b+c-12=0\end{cases}$，解得 $b=4,c=20$．

12．（1）$(0,1]$；（2）（2）因为 $a=1$，设 $h(x)=(x^2+2x+2)e^x-x-5$，

则 $h'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+2)e^x-1=(x^2+4x+4)e^x-1$．

令 $\varphi(x)=(x^2+4x+4)e^x-1$，则 $\varphi'(x)=(2x+4)e^x+(x^2+4x+4)e^x=(x^2+6x+8)e^x=(x+4)(x+2)e^x$，

由 $\varphi'(x)=(x+4)(x+2)e^x=0$，得 $x=-4$ 或 $x=-2$．

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$\varphi'(x)$	+	0	−	0	+
$\varphi(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以 $\varphi(x)_{极大值}=\varphi(-4)=4e^{-4}-1<0$，$\varphi(x)_{极小值}=\varphi(-2)=-1<0$

因为 $\varphi(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0$，$\varphi(0)=3>0$，所以存在 $x_0\in(-1,0)$，使 $\varphi(x_0)=0$，

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增．

又因为 $h(-5)=\dfrac{17}{e^5}>0$，$h(-4)=\dfrac{10}{e^4}-1<0$，$h(0)=-3<0$，$h(1)=5e-6>0$，

故根据零点存在定理，可知 $h(x)=0$ 的根 $x_1\in(-5,-4)$，$x_2\in(0,1)$，

所以方程 $f(x)=x+5$ 有且只有两个零点．

13．（1）证明：$\because BE\perp AE$，$BE\perp DE$，$AE\cap DE=E$，$BE\perp$ 平面 ADE．

$\therefore$ 平面 $ABE\perp$ 平面 ADE，因为$\triangle ADE$ 为锐角三角形，$\therefore$ 点 D 在平面 ABE 的射影在线段 AE 上，

$\therefore \angle AED$ 为直线 DE 与平面 ABE 所成的角，即 $\angle AED=\dfrac{\pi}{3}$．

又 $\because AE=DE$，$\therefore\triangle ADE$ 为等边三角形．$\because$ 点 M 为 DE 的中点，$\therefore AM\perp DE$．

又 $BE\perp AM$，$BE\cap DE=E$，$\therefore AM\perp$ 平面 $BCDE$．

$\because DN\subset$ 平面 $BCDE$，$\therefore AM\perp DN$．$\because CD=DE$，$DM=EN$，$\angle CDE=\angle DEN=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\triangle CDM\cong\triangle DEN$，$\therefore\angle END=\angle DMC$，$\therefore\angle DMC+\angle EDN=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore DN\perp CM$．$\because CM\cap AM=M$，

CM，$AM\subset$ 平面 ACM，$\therefore DN\perp$ 平面 ACM．（2）$\dfrac{\sqrt{105}}{35}$．