2 月 12 日第 12 讲 利用椭圆中相关点法探求直线的斜率问题

执教人：扬州大学附属中学东部分校 朱丽娟

一．引言：

大家好！今天和大家探究的专题是：利用椭圆中相关点法探求直线的斜率问题，这是解析几何部分的微专题之一。

直线的斜率问题在高考中经常出现，利用椭圆中相关点法探究直线的斜率问题是高考的热点与难点。

二．知识梳理：

1.基本知识：

（1）掌握椭圆的定义、几何图形、标准方程及简单性质；

（2）从解析几何从近五年高考情况来看，直线与椭圆的位置关系的考查常与向量、圆等知识相结合，所以，与之相关的知识必不可少；

（3）弦长问题：

类别一：定义求解——过圆锥曲线的焦点的弦长问题，利用圆锥曲线的定义可优化解题，这里的定义还可以用圆锥曲线的共同性质.

类别二：公式求解——将直线的方程与圆锥曲线的方程联立，求出两交点的坐标，再运用两点间距离公式求弦长.

类别三：借助韦达定理——当直线的斜率存在时，斜率为 k 的直线 l 与圆锥曲线 C 相交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两个不同的点，

则弦长 $\left|AB\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|\,(k\neq0)$.

2.高频考点及常见策略：

(1)求直线方程：可依题设条件，寻找确定该直线的两个条件，进而得到直线方程.

(2)求面积：先确定图形的形状，再利用条件寻找确定面积的条件，进而得出面积的值.

(3)弦长问题：利用根与系数的关系、弦长公式求解.

(4)中点弦或弦的中点问题：一般利用点差法求解，注意判断直线与椭圆是否相交.

特别提醒：

中点弦问题：AB 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的弦，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，弦中点 $M(x_0,y_0)$，则弦 AB 的斜率与弦中点 M 和椭圆中心 O 的连线的斜率之积为定值 $-\frac{b^2}{a^2}$.

3．回归课本：

1.将圆 $x^2+y^2=4$ 上的点横坐标保持不变，纵坐标变为原来的一半，求所求曲线的方程，

并说明它是什么曲线.

评析：这里通过求所求曲线上任意一点的坐标所满足的方程求所求曲线的方程，条件中说明：将圆上点的横坐标保持不变，纵坐标变为原来的一半.

解析：

设所求曲线上任一点坐标为（x,y）,圆$x^2+y^2=4$上的对应点的坐标为（x',y'），

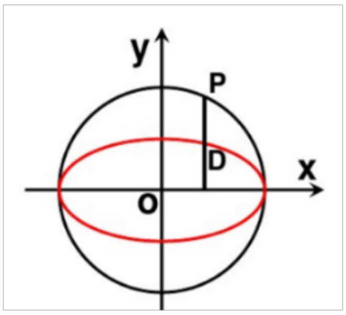
$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y. \end{cases}$$

因为$x'^2+y'^2=4$,

所以$x^2+4y^2=4$,

即$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

这就是变换后所得曲线的方程，它表示一个椭圆.



小结：（1）根据题意，建立相关点 P、D 两者的关系，也就建立起从已知到未知的桥梁,这就是相关点法的运用，也叫转移法等。

（2）算法如下：

S1:设出所求动点坐标 $P(x,\ y)$.

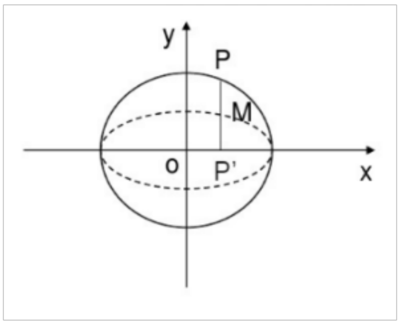
S2:寻求所求动点 $P(x,\ y)$与已知动点 $Q(x',\ y')$的关系.

S3:建立 P，Q 两坐标间的关系，并表示出 x'，y'.

S4:将 x'，y'代入已知曲线方程中化简求解.

变式： 在圆：$x^2+y^2=9$上任取一点 P，过点 P 作 x 轴的垂线段PP',P'为垂足.

点 M 在PP'上，并且$\vec{PM}=2\vec{MP'}$,求点 M 的轨迹方程.



评析：这道题目可以看成是问题 1 的变式，变在相关点 M、P 的表达方式以向量的方式呈现，向量和几何天生是朋友哦。

解析：

设点 M(x,y),P（x',y'）,由$\vec{PM}=2\vec{MP'}$得

（$x-x'$,$y-y'$）$=2(x'-x,0-y)$.即

$$\begin{cases} x'=x, \\ y-y'=-2y, \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=3y. \end{cases}$$

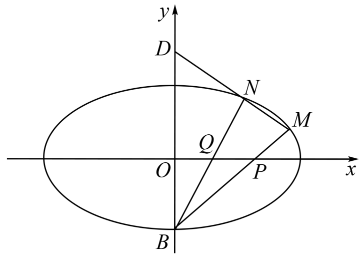
因为　$x'^2+y'^2=9$,

所以　$x^2+9y^2=4$,

即　$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

四．问题探究：

例 1(2018·南京一模)如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的下顶点为 B，点 M，N 是椭圆上异于点 B 的动点，直线 BM，BN 分别与 x 轴交于点 P, Q, 且点 Q 是线段 OP 的中点. 当点 N 运动到点$\left(\sqrt{3}，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$处时，点 Q 的坐标为$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}，0\right)$.



(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)设直线 MN 交 y 轴于点 D，当点 M，N 均在 y 轴右侧，且$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NM}$时，求直线 BM 的方程.

解析：(1)由 $N\left(\sqrt{3}，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$Q\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}，0\right)$，得直线 NQ 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-\sqrt{3}$.

令 $x=0$，得点 B 的坐标为$(0，-\sqrt{3})$.

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$.

将点 N 的坐标$\left(\sqrt{3}，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$代入，得$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3}=1$,

解得 $a^2=4$.

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)解法 1：设直线 BM 的斜率为 $k(k>0)$,

则直线 BM 的方程为 $y=kx-\sqrt{3}$.

在 $y=kx-\sqrt{3}$中，令 $y=0$，得 $x_P=\frac{\sqrt{3}}{k}$,

而点 Q 是线段 OP 的中点，所以 $x_Q=\frac{\sqrt{3}}{2k}$.

所以直线 BN 的斜率 $k_{BN}=k_{BQ}=\frac{0-(-\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{3}}{2k}-0}=2k$.

联立$\begin{cases}y=kx-\sqrt{3},\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y，得$(3+4k^2)x^2-8\sqrt{3}kx=0$，

解得 $x_M=\dfrac{8\sqrt{3}k}{3+4k^2}$.

用 2k 代 k，得 $x_N=\dfrac{16\sqrt{3}k}{3+16k^2}$.

又$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NM}$，所以 $x_N=2(x_M-x_N)$，

得 $2x_M=3x_N$.

故 $2\times\dfrac{8\sqrt{3}k}{3+4k^2}=3\times\dfrac{16\sqrt{3}k}{3+16k^2}$，

又 $k>0$，解得 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.所以直线 BM 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}x-\sqrt{3}$.

解法 2：设点 M，N 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．由 $B(0，-\sqrt{3})$，

得直线 BN 的方程为 $y=\dfrac{y_1+\sqrt{3}}{x_1}x-\sqrt{3}$，

令 $y=0$，得 $x_P=\dfrac{\sqrt{3}x_1}{y_1+\sqrt{3}}$.

同理，得 $x_Q=\dfrac{\sqrt{3}x_2}{y_2+\sqrt{3}}$.

而点 Q 是线段 OP 的中点，所以 $x_P=2x_Q$，

故$\dfrac{\sqrt{3}x_1}{y_1+\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}x_2}{y_2+\sqrt{3}}$.

又$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NM}$，

所以 $x_2=2(x_1-x_2)$，得 $x_2=\dfrac{2}{3}x_1>0$，

从而$\dfrac{1}{y_1+\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{4}{3}}{y_2+\sqrt{3}}$，

解得 $y_2=\dfrac{4}{3}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

将$\begin{cases}x_2=\dfrac{2}{3}x_1,\\ y_2=\dfrac{4}{3}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$代入到椭圆 C 的方程中,

得$\dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{(4y_1+\sqrt{3})^2}{27}=1$.

又 $x_1^2=4\left(1-\dfrac{y_1^2}{3}\right)$,

所以$\dfrac{4\left(1-\dfrac{y_1^2}{3}\right)}{9}+\dfrac{(4y_1+\sqrt{3})^2}{27}=1$,

即$\sqrt{3}y_1^2+2y_1-\sqrt{3}=0$,

解得 $y_1=-\sqrt{3}$(舍)或 $y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $x_1>0$，所以点 M 的坐标为$\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

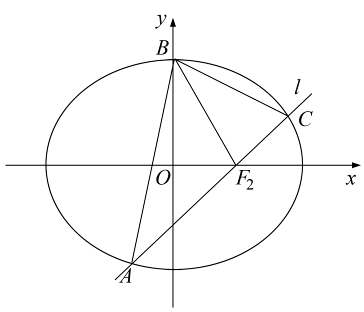
故直线 BM 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}x-\sqrt{3}$.

变式 1 过点 P(−4，0)的直线 l 与椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相交于 A，B 两点，若点 A 恰好是线段 PB 的中点，则直线 l 的方程为______________.

答案：$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{6}(x+4)$.

解析：设出点 A 的坐标进而利用条件求出点 B 的坐标，然后将点 A 和 B 的坐标代入椭圆方程中即可求得 A.进而可求得直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{6}(x+4)$.

变式 2 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，B 是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的上顶点，已知过右焦点 F_2 且斜率为正直线 l 与椭圆相交于 A，C 两点，记△ABF_2，△BCF_2 的面积分别为 S_1，S_2.若 $S_1=2S_2$，则直线 l 的斜率为____________.



答案：$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

解析：设 B 到直线 AC 的距离为 h，由于 $S_1=2S_2$，

所以，$\frac{1}{2}AF_2\cdot h=2\times\frac{1}{2}F_2C\cdot h$，即 $AF_2=2F_2C$，所以，$\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2C}$.

设 $A(x_1，y_1)$，$C(x_2，y_2)$，又 $F_2(1，0)$，

则$(1-x_1，-y_1)=2(x_2-1，y_2)$，即$\begin{cases}x_1=3-2x_2,\\y_1=-2y_2.\end{cases}$

由$\begin{cases}\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1,\\\frac{(3-2x_2)^2}{4}+\frac{(-2y_2)^2}{3}=1,\end{cases}$

解得，$\begin{cases}x_2=\frac{7}{4},\\y_2=\pm\frac{3\sqrt{5}}{8}.\end{cases}$

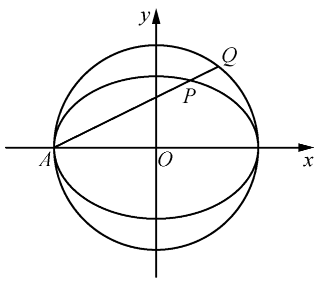
所以，直线 l 的斜率为 $k=\frac{\pm\frac{3\sqrt{5}}{8}}{\frac{7}{4}-1}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，

因为斜率为正，

所以，$k=\frac{\sqrt{5}}{2}$

变式 3. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4，过椭圆的左顶点 A 作直线 l，分别交椭圆和圆 $x^2+y^2=a^2$ 于相异两点 P，Q.

若直线 l 的斜率为$\frac{1}{2}$，求$\frac{AP}{AQ}$的值；



解析：(1) 由题意得$\begin{cases}2a=4,\\\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\b=\sqrt{2},\end{cases}$

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,

圆的方程为 $x^2+y^2=4$.

由题意得直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x+2)$,

联立$\begin{cases} y=\frac{1}{2}(x+2), \\ x^2+2y^2=4, \end{cases}$得 $3x^2+4x-4=0$,

解得 $x_A=-2$，$x_P=\frac{2}{3}$，所以点 $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$,

所以 $AP=\sqrt{\left(\frac{2}{3}+2\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$,

又因为原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

所以 $AQ=2\sqrt{4-\frac{4}{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$,

所以$\frac{AP}{AQ}=\frac{\frac{4\sqrt{5}}{3}}{\frac{8\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{6}$.

例 2（常州市 2019 届高三上期末，17）

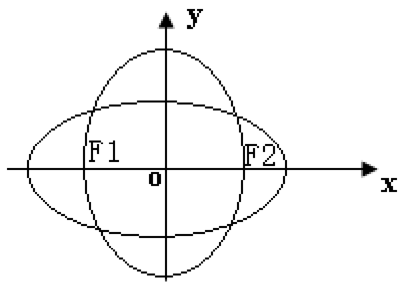
在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点在椭圆 C_2：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 上，其中

$a>b>0$，且点 $P(\frac{\sqrt{6}}{3}，\frac{\sqrt{6}}{3})$是椭圆 C_1，C_2 位于第一象限的交点.

（1）求椭圆 C_1，C_2 的标准方程;

（2）过 y 轴上一点 P 的直线 l 与椭圆 C_2 相切，与椭圆 C_1 交于点 A，B，已知 $\overrightarrow{PA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{PB}$，求直线 l 的斜率.

解析:



（1）如下图所示，依题意，得：c＝b，所以，$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}b$，

所以，椭圆 C1 为：$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，将点$(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$代入，解得：b＝1,

所以，C_1：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，C_2：$\frac{y^2}{2}+x^2=1$

(2) 由题意知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 y＝kx＋m，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，P(0，m)，

由$\begin{cases}\frac{y^2}{2}+x^2=1, \\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y，得$\frac{(kx+m)^2}{2}+x^2=1$，

即$\left(1+\frac{k^2}{2}\right)x^2+kmx+\frac{m^2}{2}-1=0$，因为直线 l 与椭圆 C_2 相切，所以

$\Delta=k^2m^2-4\left(1+\frac{k^2}{2}\right)\left(\frac{m^2}{2}-1\right)=0$，

即 $k^2+2-m^2=0$.(7 分)

由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1, \\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y，得$\frac{x^2}{2}+(kx+m)^2=1$，即$\left(\frac{1}{2}+k^2\right)x^2+2kmx+m^2-1=0$，

因为直线 l 与椭圆 C_1 相交，有$\Delta=4k^2m^2-4\left(\frac{1}{2}+k^2\right)(m^2-1)=4\left(k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\right)>0(*)$，

$$x_{1,2}=\frac{-2km\pm\sqrt{4\left(k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\right)}}{2\left(\frac{1}{2}+k^2\right)}.\text{(9 分)}$$

因为$\overrightarrow{PA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{PB}$，即$(x_1，y_1-m)=\frac{3}{5}(x_2，y_2-m)$，则 **$5x_1=3x_2$,**

所以 $5\frac{-2km+\sqrt{4\left(k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\right)}}{2\left(\frac{1}{2}+k^2\right)}=3\frac{-2km-\sqrt{4\left(k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\right)}}{2\left(\frac{1}{2}+k^2\right)}$

或

$$5\frac{-2km-\sqrt{4\left(k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\right)}}{2\left(\frac{1}{2}+k^2\right)}=3\frac{-2km+\sqrt{4\left(k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\right)}}{2\left(\frac{1}{2}+k^2\right)}$$

化简得，$km=4\sqrt{k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}}$或 $km=-4\sqrt{k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}}$,

即 $k^2m^2=16\left(k^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\right)$.(12 分)

又因为 $k^2+2-m^2=0$,

解得$\begin{cases}k^2=2,\\m^2=4\end{cases}$ 或$\begin{cases}k^2=4,\\m^2=6,\end{cases}$

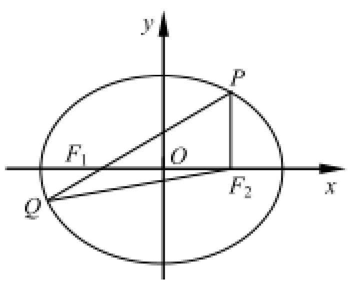
符合(*)式，所以直线 l 的斜率为$\pm\sqrt{2}$或±2.(14 分)

课堂练习：

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆

$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1， F_2， P

为 C 椭圆上一点，且 PF_2 垂直于 x 轴，连接 PF_1 并延长交椭



圆于另一点Q，设$PQ=\lambda F_1Q$．

若点P的坐标为$(2,3)$，求椭圆C的方程及λ的值;

【答案】$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，$\lambda=\frac{10}{3}$．

【解析】(1）因为PF_2垂直于x轴，且点P的坐标为$(2,3)$，

所以$a^2-b^2=c^2=4$，$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$，解得$a^2=16$，$b^2=12$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$．

所以$F_1(-2,0)$，直线PF_1的方程为$y=\frac{3}{4}(x+2)$，

将$y=\frac{3}{4}(x+2)$代入椭圆C的方程，解得$x_Q=-\frac{26}{7}$，

所以$\lambda=\frac{PQ}{F_1Q}=\frac{x_P-x_Q}{x_{F_1}-x_Q}=\frac{2+\frac{26}{7}}{-2+\frac{26}{7}}=\frac{10}{3}$．

四、课堂小结: