实施同构变换 构建同构函数 实现变量分离*

福建省厦门第一中学
福建省教育学院数学教育研究所 361003 王淼生

【摘 要】 在同时含有指数与对数的导数综合试题中,求解参数的取值范围是一类棘手的问题.倘若直接将变量分离,不仅过程复杂,而且难度较大.有效地实施一系列同构变换,使得等式或不等式两边结构完全相同.依据结构特点,构建可控的同构函数.借助函数单调性,实现变量分离,快速解决问题.

【关键词】 同构变换;同构函数;变量分离

对于同时含有指数与对数的导数综合试题,倘若直接对参数分离,不仅过程复杂,而且难度较大,甚至无法分离.我们可以有效地实施一系列代数变换(如 $x=\ln e^x$,或 $x=e^{\ln x}$),使得等式或不等式两边结构完全相同,即同构形式:$f(g(x))\geqslant f(h(x))$.依据结构特征,构建一个可控的函数 $f(x)$.借助函数 $f(x)$ 的单调性(如单调递增),将复杂问题等价转化为 $g(x)\geqslant h(x)$,进一步转化为参数 $a\geqslant\varphi(x)$,实现变量 a 分离.再利用熟悉的函数 $\varphi(x)$ 最值得到 a 的取值范围.如果上述 $g(x)\geqslant h(x)$ 依然难以分离参数 a,我们可以重复上述步骤,将 $g(x)\geqslant h(x)$ 再一次实施同构变换得到 $w(g_1(x))\geqslant w(h_1(x))$,再借助函数 $w(x)$ 的单调性(如单调递增),得到 $g_1(x)\geqslant h_1(x)$,进一步转化为 $a\geqslant\varphi_1(x)$,从而求出 a 的取值范围,问题获得解决.我们把这个过程称为同构变换,这个新的函数称为同构函数.构建同构函数是一种重要的思想方法,需要仔细观察其外形结构,深入剖析其本质属性,有利于培养学生敏锐的观察能力、丰富的想象能力、灵活的构造能力和高超的创造能力.

1 呈现经典案例

(1) 在选择题中

案例1 对任意 $x>0$,恒有 $a(e^{ax}+1)\geqslant 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$,则实数 a 的最小值为( ).

A.$\dfrac{1}{e^2}$ B.$\dfrac{2}{e^2}$ C.$\dfrac{1}{e}$ D.$\dfrac{2}{e}$

剖析 直接将实数 a 分离,难度较大,于是实施以下同构变换:

$a(e^{ax}+1)\geqslant 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$(两边同乘以 x)

$\Leftrightarrow ax(e^{ax}+1)\geqslant 2(x^2+1)\ln x$
(逆用对数运算法则)

$\Leftrightarrow ax(e^{ax}+1)\geqslant(x^2+1)\ln x^2$
(利用 $ax=\ln e^{ax}$)

$\Leftrightarrow(e^{ax}+1)\ln e^{ax}\geqslant(x^2+1)\ln x^2$. (*)

由于(*)式两边结构相同,于是构建同构函数:$f(t)=(t+1)\ln t$,因此(*)式等价于 $f(e^{ax})\geqslant f(x^2)$.

求导可得 $f(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上单调递增,至此实现了变量分离:

$$e^{ax}\geqslant x^2\Rightarrow ax\geqslant 2\ln x\Rightarrow\frac{a}{2}\geqslant\frac{\ln x}{x}.$$

显然,$y=\dfrac{\ln x}{x}$ 是熟悉的函数,求导可得该函数最大值为 $\dfrac{1}{e}$,即 $\dfrac{a}{2}\geqslant\dfrac{1}{e}$,则 $a\geqslant\dfrac{2}{e}$,因此答案为D.

(2) 在填空题中

案例2 存在 $x\in(1,+\infty)$,使得关于 x 的不等式 $x+k\ln x+e^{-x}\geqslant x^k$ 成立,则实数 k 的取值范围为______.

剖析 直接将实数 k 分离,难度较大,于是实施以下同构变换:

$x+k\ln x+e^{-x}\geqslant x^k\Leftrightarrow x+e^{-x}\geqslant -k\ln x+x^k$
(利用 $x^k=e^{-(-k\ln x)}$)

$\Leftrightarrow x+e^{-x}\geqslant(-k\ln x)+e^{-(-k\ln x)}$. (*)

由于(*)式两边结构相同,于是构建同构函数:$f(x)=x+e^{-x}$,因此(*)式等价于 $f(x)\geqslant f(-k\ln x)$.

求导可得 $f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增,至此实现了变量分离:$x\geqslant -k\ln x\Rightarrow -k\leqslant\dfrac{x}{\ln x}$.

显然,$y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是熟悉的函数,求导可得该函数最小值为 e,即 $-k\leqslant e$,故实数 k 的取值范围为 $k\geqslant -e$.

(3) 在解答题中

* 基金项目:本文为厦门市首届名师工作室王淼生高中数学名师工作室课题"核心素养下的疑难中学数学概念教学研究(立项批准号:XMMS2020004)"阶段性研究成果.

案例3　已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（Ⅰ）当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两个坐标轴围成的三角形的面积；

（Ⅱ）若 $f(x)\geqslant 1$，求 a 的取值范围.

剖析　略去（Ⅰ）的解答过程.对于（Ⅱ），直接将实数 a 分离，难度较大，于是实施以下同构变换：

$ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant 1$（利用 $a=e^{\ln a}$）

$\Leftrightarrow e^{\ln a}\cdot e^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant 1$（利用指数运算法则）

$\Leftrightarrow e^{\ln a+x-1}-\ln x+\ln a\geqslant 1$（适当凑配变形）

$\Leftrightarrow e^{\ln a+x-1}+(\ln a+x-1)\geqslant x+\ln x$（利用 $x=e^{\ln x}$）

$\Leftrightarrow e^{\ln a+x-1}+(\ln a+x-1)\geqslant e^{\ln x}+\ln x.$　（*）

由于（*）式两边结构相同，于是构建同构函数：$g(x)=e^x+x$，因此（*）式等价于 $g(\ln a+x-1)\geqslant g(\ln x)$.

求导可得 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，至此实现了变量分离：

$\ln a+x-1\geqslant \ln x\Rightarrow \ln a\geqslant \ln x-x+1.$

显然，$h(x)=\ln x-x+1$ 是熟悉的函数.求导可得该函数最大值为0，即 $\ln a\geqslant 0$，故 $a\geqslant 1$.

案例4　已知函数 $f(x)=e^{-x}+x\ln x+ax^2+bx$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$y=\left(2-\dfrac{1}{e}\right)x+\dfrac{2}{e}-2.$

（Ⅰ）求 a 与 b 的值；

（Ⅱ）证明：函数 $f(x)$ 有唯一的极值点，且极值为0.

剖析　对于（Ⅰ）来说，可以求出 $a=1,b=-1$.对于（Ⅱ）来说，由（Ⅰ）可得

$f(x)=e^{-x}+x\ln x+x^2-x\Rightarrow f'(x)=\ln x+2x-e^{-x}.$

不难发现 $f'(x)=\ln x+2x-e^{-x}$ 为单调递增函数.当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$；当 $x\to 0^+$ 时，$f'(x)\to-\infty$，注意到函数 $f'(x)=\ln x+2x-e^{-x}$ 的图象连续不断，依据零点存在定理可知存在唯一的 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，则有

$\ln x_0+2x_0-e^{-x_0}=0$　①

$\Rightarrow \ln x_0+x_0=e^{-x_0}-x_0.$　②

事实上，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $x\in(x_0,+\infty)$ 上单调递增，因此 x_0 是函数 $y=f(x)$ 唯一极值点，且取得极小值为

$f(x_0)=e^{-x_0}+x_0\ln x_0+x_0^2-x_0.$　③

③式较为复杂，必须化简.该如何化简呢？

由①式可得 $e^{-x_0}=\ln x_0+2x_0$ 并代入③式得到

$f(x_0)=(\ln x_0+2x_0)+x_0\ln x_0+x_0^2-x_0$

$\Rightarrow f(x_0)=(\ln x_0+x_0)(x_0+1).$

由于 $x_0\in(0,+\infty)$，则 $x_0+1>0$，以下只要证明：$\ln x_0+x_0=0$ 即可.

针对上述②式，我们实施以下同构变换：

$\ln x_0+x_0=e^{-x_0}-x_0\Leftrightarrow \ln x_0+x_0=e^{-x_0}+(-x_0)$（利用 $x_0=e^{\ln x_0}$）$\Leftrightarrow e^{\ln x_0}+\ln x_0=e^{-x_0}+(-x_0).$　④

由于④式两边结构相同，于是构建同构函数：$g(x)=e^x+x$，于是上述④式等价于 $g(\ln x_0)=g(-x_0)$.

求导可得函数 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，由此得到 $\ln x_0=-x_0\Rightarrow \ln x_0+x_0=0$.

2　一组训练试题

训练题1　设实数 $\lambda>0$，若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\dfrac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$ 恒成立，则 λ 的最小值为（　　）.

A. $\dfrac{1}{e}$　　B. $\dfrac{1}{2e}$　　C. $\dfrac{2}{e}$　　D. $\dfrac{3}{e}$

提示　由同构变换得到 $(\lambda x)e^{\lambda x}\geqslant \ln x e^{\ln x}$.构建同构函数：$f(x)=xe^x$，利用函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增得到 $\lambda x\geqslant \ln x\Rightarrow \lambda\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$（实现了变量分离）$\Rightarrow \lambda\geqslant\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)_{\max}=\dfrac{1}{e}$.

训练题2　对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $k(e^{kx}+1)-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x>0$，则实数 k 的取值范围为______.

提示　由同构变换得到 $(e^{kx}+1)\ln e^{kx}>(x+1)\ln x$.构建同构函数：$f(t)=(t+1)\ln t$，利用函数 $f(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上单调递增得到

$e^{kx}\geqslant x\Rightarrow kx\geqslant \ln x\Rightarrow k\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$（实现了变量分离）

$\Rightarrow k\geqslant\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)_{\max}=\dfrac{1}{e}$.

训练题3　已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{bx}}{ax}$ 在 $x=2$ 处取得极值为 $\dfrac{e}{2}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若不等式 $x^2f(x)\geqslant kx+\ln x+1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 k 的取值范围.

提示　对于（Ⅰ）来说，可得 $a=1,b=0.5$，可知函数 $f(x)$ 单调增区间为 $(2,+\infty)$；单调减区间为 $(-\infty,0)$，$(0,2)$.对于（Ⅱ）来说：

$x^2f(x)\geqslant kx+\ln x+1\Rightarrow xe^{\frac{x}{2}}\geqslant kx+\ln x+1\Rightarrow k\leqslant e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1+\ln x}{x}.$

构造函数 $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1+\ln x}{x}$，则 $k\leqslant g(x)_{\min}$.

求导可得 $g'(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^2e^{\frac{x}{2}}+\ln x}{x^2}$.

再构造函数 $h(x)=\frac{1}{2}x^2e^{\frac{x}{2}}+\ln x$, 求导可得 $h'(x)=x\left(1+\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{x}>0$ 恒成立,即 $h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 单调递增.注意到:当 $x\to+\infty$ 时, $h(x)\to+\infty$;当 $x\to0^+$ 时,$h(x)\to-\infty$.依据零点存在定理并结合单调性可知函数 $h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点 x_0,使得当 $x\in(0,x_0)$ 时, $h(x)<0$,即 $g'(x)<0$,则 $g(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上递减;当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$h(x)>0$,即 $g'(x)>0$,则 $g(x)$ 在 $x\in(x_0,+\infty)$ 上递增,则有

$$k\leqslant g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{\frac{x_0}{2}}-\frac{1+\ln x_0}{x_0}. \quad ①$$

实施以下同构变换:由上述分析可知

$h(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0^2e^{\frac{x_0}{2}}+\ln x_0=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0e^{\frac{x_0}{2}}+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$(两边同除以 x_0)$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0e^{\frac{x_0}{2}}=-\frac{\ln x_0}{x_0}$(移项)$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0e^{\frac{x_0}{2}}=\dfrac{\ln\frac{1}{x_0}}{x_0}$(变形)$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0e^{\frac{x_0}{2}}=\ln\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{x_0}$(再变形)$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0e^{\frac{x_0}{2}}=\ln\frac{1}{x_0}e^{\ln\frac{1}{x_0}}$. ②

由于②式两边结构相同,据此构建同构函数: $\varphi(x)=xe^x$,因此上述②式等价于 $\varphi\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\varphi\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$.

求导可得函数 $\varphi(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增,于是得到(类似于变量分离)

$$\frac{1}{2}x_0=\ln\frac{1}{x_0}\Rightarrow e^{\frac{x_0}{2}}=\frac{1}{x_0},\ln x_0=-\frac{1}{2}x_0. \quad ③$$

将③式代入上述①式得到

$$k\leqslant g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{\frac{x_0}{2}}-\frac{1+\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}-\frac{1-\frac{1}{2}x_0}{x_0}=\frac{1}{2}.$$

3 反思同构过程

3.1 直接构建函数 难以继续推进

案例1作为选择题压轴题,源自2020届厦门一中高三质检试题,大部分学生直接构造函数 $f(x)=a(e^{ax}+1)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$;案例2作为填空题压轴题,由一道质检试题改编而来,学生基本都是直接构造函数 $f(x)=x+k\ln x+e^{-x}-x^k$;案例3源自2020年新高考全国Ⅰ卷导数压轴题,考生也是直接构造函数 $g(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1$.由于所构造的函数中同时含有指数、对数及参数,不仅求导过程复杂,而且难以继续推进,大部分考生产生畏惧情绪,导致最终无奈放弃.

3.2 同构变换"搭台" 同构函数"唱戏"

从上述案例1、案例2、案例3、案例4及训练题1、题2、题3的剖析过程,不难发现其同构变换主要手段为 $x=\ln e^x$(案例1、训练题2)与 $x=e^{\ln x}$(案例2、案例3、案例4、训练题1、题3),实现同构变换后所构造的同构函数都是常见的、熟悉的函数,即 x 与 $\ln x$ 或 x 与 e^x 的简单组合,比如构造函数:$y=\frac{\ln x}{x}$(案例1、题1、题2);$y=\frac{x}{\ln x}$(案例2);$y=\ln x-x$(案例3);$y=x\ln x$;$y=\frac{x}{e^x}$;$y=\frac{e^x}{x}$;$y=xe^x$;$y=x+e^x$,等等.这些函数是基本的、可控的函数,实现了由复杂到简单、陌生到熟悉、难以把握到可控.

3.3 反思同构过程 追寻命题规律

解题是为了追寻命题专家命题的规律,那么专家是如何命制上述试题的呢?其实,专家命题的过程正好是上述解答过程的逆过程,以案例1为例:专家首先设定一个看似简单的单调函数:$f(t)=(t+1)\ln t$,然后将参数"添加"进去:$f(e^{ax})\geqslant f(x^2)$.这正是前言中的"$f(g(x))\geqslant f(h(x))$",此处 $g(x)=e^{ax}$, $h(x)=x^2$.于是得到 $(e^{ax}+1)\ln e^{ax}\geqslant(x^2+1)\ln x^2$.

借助 $x=\ln e^x$,或 $x=e^{\ln x}$ 等变换得到 $ax(e^{ax}+1)\geqslant2(x^2+1)\ln x$.

然后再通过移项、两边加减同乘除等一系列基本的代数四则运算得到原题:

$$a(e^{ax}+1)\geqslant2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x.$$

如果命题专家有意增加难度,只要将此处的函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 表达式变得复杂一些,甚至有时"故意"把表达式中的次序"打乱",于是一道又一道妙不可言的试题就呈现在我们面前.

作者简介 王森生(1966—),男,特级教师,正高级教师,"苏步青数学教育奖"一等奖获得者,中国数学奥林匹克竞赛高级教练,福建省海纳百川高层次人才,厦门市拔尖人才,厦门市杰出教师、卓越教师、专家型教师.