

江苏省仪征中学高一数学周练(6) 时间: 2019.10.27

练习范围: 集合、函数、指数函数、对数函数

一、选择题: 本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 满分 40 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x|x < 1\}$, $B = \{x|3^x < 1\}$, 则()

A. $A \cap B = \{x|x < 0\}$ B. $A \cup B = \mathbb{R}$ C. $A \cup B = \{x|x > 1\}$ D. $A \cap B = \emptyset$

2. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时 $f(x) = -x(1+x)$, 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 等于()

A. $-x(1-x)$ B. $x(1-x)$ C. $-x(1+x)$ D. $x(1+x)$

3. 函数 $f(x) = a^x + b - 1$ (其中 $0 < a < 1$ 且 $0 < b < 1$) 的图象一定不经过()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^{\frac{1}{3}}, & x \leq -1 \\ x + \frac{2}{x} - 7, & x > -1 \end{cases}$ 则 $f[f(-8)] =$ ()

A. -2 B. 2 C. -4 D. 4

5. 已知函数 $f(x) = 4x^2 + kx - 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上是单调函数, 则实数 k 的取值范围是()

A. $(-\infty, -16] \cup [-8, +\infty)$ B. $[-16, -8]$
C. $(-\infty, -8) \cup [-4, +\infty)$ D. $[-8, -4]$

6. 设 $a = \log_7 3$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 7$, $c = 3^{0.7}$, 则 a, b, c 的大小关系是()

A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

7. 若函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x - 3, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$ 单调递增, 则实数 a 的取值范围是()

A. $(\frac{9}{4}, 3)$ B. $[\frac{9}{4}, 3)$ C. $(1, 3)$ D. $(2, 3)$

8. 设函数 $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1+x^2}$, 则使得 $f(x) > f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是()

A. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$ B. $(\frac{1}{3}, 1)$
C. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ D. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

二、填空题: 共 4 个小题, 每小题 5 分, 满分 20 分

9. 已知函数 $f(x) = ax^2 + (b-3)x + 3$, $x \in [a^2-2, a]$ 是偶函数, 则 $a+b =$ _____.

10. 函数 $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x^2-3x)}$ 的定义域为_____.

11. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 3)$ 的单调递减区间是_____ .

12. 函数 $f(x) = \log_a(ax^2 - x)$ 在 $[2, 4]$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____ .

三、解答题: 共 5 题, 每题 10 分。

13. (10 分) 解下列方程和不等式

(1) $\lg(2-x) = \lg \frac{x-1}{2}$

(2) $\log_3(x+2) < 3$

(3) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

14. (10 分) 已知集合 $A = \{x | m-1 \leq x \leq 2m+3\}$, 函数 $f(x) = \lg(-x^2 + 2x + 8)$ 的定义域为 B .

(1) 当 $m = 2$ 时, 求 $A \cup B$ 、 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$;

(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

15. (10 分) 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

(1) 作出函数 $f(x)$ 的图象;

(2) 直接写出函数 $f(x)$ 的值域和单调区间;

(3) 若 $f(x-1) + f(2x) + m \geq 0$ 在 $m \geq 1$ 时恒成立, 求 m 的取值范围.

16. (10 分) 已知 $f(x) = \log_a \frac{1-mx}{1+x}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$, $m \neq -1$) 是定义在区间 $(-1, 1)$ 上的奇函数,

(1) 求 $f(0)$ 的值和实数 m 的值;

(2) 当 $a > 1$ 时, 判断并证明函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调性;

(3) 若 $f(\frac{1}{2}) > 0$ 且 $f(b-2) + f(2b-2) > 0$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

17. (附加题) (10 分) 已知函数 $f(x) = \log_2[1 + 2^x + a \cdot (4^x + 1)]$

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 值域;

(2) 当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, 函数 $f(x)$ 有意义, 求实数 a 的取值范围;

(3) $a = -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = x + b$ ($0 \leq x \leq 1$) 无交点, 求实数 b 的取值范围.

江苏省仪征中学高一数学周练(6) 答案

一选择题: AACC ADBB

二填空题: 9. 4 10. $\left[-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ 11. $(1, +\infty)$ 12. $(1, +\infty)$

三、解答题:

13. (1) $x = \frac{5}{3}$ (2) $(-2, 25)$ (3) $x = 0$ 或 1

14. 解: (1) 根据题意, 当 $m = 2$ 时, $A = \{x | 1 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | -2 < x < 4\}$,

则 $A \cup B = \{x | -2 < x \leq 7\}$,

又 $C_R A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 7\}$, 则 $(C_R A) \cap B = \{x | -2 < x < 1\}$;

(2) 根据题意, 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$,

分 2 种情况讨论:

① 当 $A = \emptyset$ 时, 有 $m - 1 > 2m + 3$, 解可得 $m < -4$,

② 当 $A \neq \emptyset$ 时,

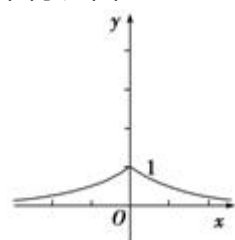
若有 $A \subseteq B$, 必有 $\begin{cases} m - 1 \leq 2m + 3 \\ m - 1 > -2 \\ 2m + 3 < 4 \end{cases}$, 解可得 $-1 < m < \frac{1}{2}$,

综上可得: m 的取值范围是: $(-\infty, -4) \cup (-1, \frac{1}{2})$.

15. 解: (1) 当 $x \geq 0$ 时, 函数为 $y = (\frac{1}{2})^x$;

当 $x < 0$ 时, 函数为 $y = (2)^{-|x|} = 2x$, 其图象由 $y = (\frac{1}{2})^x$ ($x \geq 0$) 和 $y = 2x$ ($x < 0$) 的图象合并而成.

而 $y = (\frac{1}{2})^x$ ($x \geq 0$) 和 $y = 2x$ ($x < 0$) 的图象关于 y 轴对称, 所以原函数图象关于 y 轴对称, 图象如图:



(2) 由图象可知, 值域是 $(0, 1]$; 单调增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调减区间为 $(0, +\infty)$

(3) $f(x-1) + f(2x) + m \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + \left(\frac{1}{2}\right)^{|2x|} + m \geq 0$,

因为 $x \geq 1$, 所以原不等式等价于 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + m \geq 0$,

令 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t, 0 < t \leq \frac{1}{2}$, 则原不等式等价于 $t^2 + 2t + m \geq 0$ 在 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 上恒成立,

所以 $m \geq (-t^2 - 2t)_{\max}$, 因为 $-t^2 - 2t = -(t+1)^2 + 1 < 0$, 所以 $m \geq 0$,

即 m 的取值范围为 $m \geq 0$.

16. 解: (1) $\because f(x) = \log_a \frac{1-mx}{1+x}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1, m \neq -1$) 是定义在区间 $(-1, 1)$ 上的奇函数,

$\therefore f(0) = 0$,

且 $f(-x) = -f(x)$, 即 $\log_a \frac{1+mx}{1-x} = -\log_a \frac{1-mx}{1+x}$,

即 $\log_a \frac{1+mx}{1-x} + \log_a \frac{1-mx}{1+x} = \log_a \frac{1-m^2x^2}{1-x^2} = \log_a 1 = 0$,

故 $m^2 = 1$,

又 $\because m \neq -1$,

故 $m = 1$,

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \log_a \frac{1-x}{1+x} = \log_a \left(\frac{2}{1+x} - 1\right)$,

令 $t = \frac{2}{1+x} - 1$, 则 t 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减,

当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a t$ 为减函数, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调递增;

当 $a > 1$ 时, $y = \log_a t$ 为增函数, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调递减;

(3) 若 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_a \frac{1}{3} > 0$, 则 $0 < a < 1$,

由 (1) 得, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调递增,

若 $f(b-2) + f(2b-2) > 0$,

则 $f(b-2) > -f(2b-2)$,

则 $f(b-2) > f(2-2b)$,

则 $-1 < 2-2b < b-2 < 1$,

解得: $b \in \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

17. 解: (1) $(1, +\infty)$

(2) 由题 $1 + 2^x + a(4^x + 1) > 0$ 对一切 $x \in (-\infty, 1]$ 恒成立 $a > \left(-\frac{2^x+1}{4^x+1}\right)_{\max}$

令 $t = 2^x + 1 \in (1, 3]$

$h(t) = -\frac{t}{t^2-2t+2} = -\frac{1}{t+\frac{2}{t}-2}$

在 $(1, \sqrt{2})$ 上单减, 在 $[\sqrt{2}, 3]$ 上单增

$\therefore h(t)_{\max} = \max\{h(1), h(3)\} = -\frac{3}{5} \therefore a > -\frac{3}{5}$

(3) $a = -\frac{1}{2}$ 时, $\log_2 \left[1 + 2^x - \frac{1}{2}(4^x + 1)\right] - x = b$ ($0 \leq x \leq 1$) $\log_2 \frac{-\frac{1}{2}4^x + 2^x + \frac{1}{2}}{2^x} = b$,

记 $m = \frac{-\frac{1}{2}4^x + 2^x + \frac{1}{2}}{2^x} = -\frac{1}{2}\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) + 1$

令 $n = 2^x \in [1, 2], g(n) = -\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right) + 1$,

在 $[1, 2]$ 上单调递减

$\therefore \frac{1}{4} = g(2) \leq g(n) \leq g(1) = 1$,

$\therefore -2 \leq \log_2 g(n) \leq 0$,

$\therefore$ 图象无交点, $\therefore b < -2$ 或 $b > 0$,