

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第一学期高三数学周末练习（五）

一、单项选择题

1. 已知集合 $A = \{x | (x-1)(x+2) < 0\}$, 集合 $B = \{x | \frac{x}{x-1} > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | -2 < x < 0\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\mathbb{R}$

2. 已知 m, n 是两条不同直线, α, β, γ 是三个不同平面, 则下列命题正确的是 ()

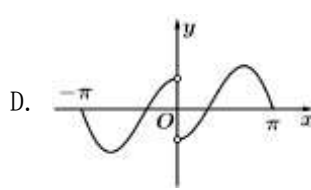
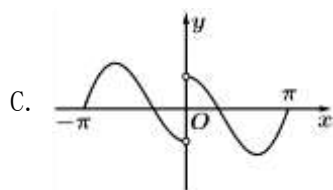
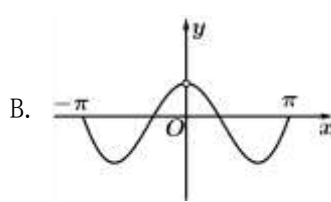
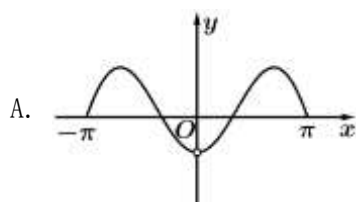
- A. 若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$ B. 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha // \beta$
C. 若 $m // \alpha, m // \beta$, 则 $\alpha // \beta$ D. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m // n$

3. 若 $\tan \theta = -2$, 则 $\frac{\sin \theta (1 - \sin 2\theta)}{\sin \theta - \cos \theta} =$ ()

- A. $\frac{6}{5}$ B. $-\frac{6}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

4. 我国著名数学家华罗庚先生曾说: 数缺形时少直观, 形缺数时难入微, 数形结合百般好, 隔裂分家万事休. 在数学的学习和研究中, 常用函数的图象来研究函数的性质, 也常用函数的解析式来研究函数图象的特征. 观察以下四个图象的特征, 试判断与函数

$f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \sin|x|, \quad (-\pi \leq x \leq \pi, x \neq 0)$ 相对应的图象是 ()



5. 正三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA=2, AB=2\sqrt{2}$, 则该棱锥外接球的表面积为 ()

- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. 4π C. 12π D. 6π

6. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$, 则不等式 $f(x^2 - 3) + f(2x) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-3, 1)$ B. $(-1, 3)$ C. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ D. $[-1, 3]$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时,

$f(x) = -3x^2 + 2$, 则 $f\left(\frac{14}{3}\right) =$ ()

- A. $-\frac{10}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

8. 设 $a = 2022 \ln 2020$, $b = 2021 \ln 2021$, $c = 2020 \ln 2022$, 则 ()
 A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $a > c > b$ D. $b > a > c$

二、多项选择题

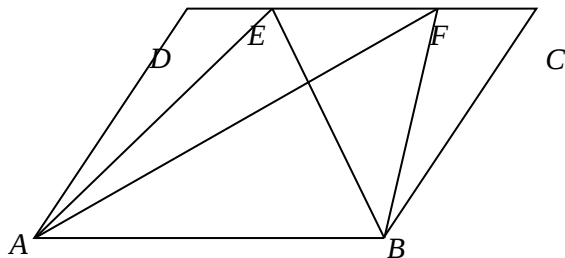
9. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 F, E 分别是靠近 C, D 的四等分点, 则下列结论正确的是 ()

A. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{AF} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

D. $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AD})^2 - \frac{9}{16} (\overrightarrow{AB})^2$



10. 已知函数 $f(x) = 2 \cos^2 x - \cos(2x - \theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $(0, \frac{3}{2})$, 则 ()

A. 点 $(\frac{\pi}{12}, 1)$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心

B. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π

C. 函数 $f(x)$ 的最大值为 2

D. 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴

11. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时 $f(x) = e^{1-|x|} - 2$,

则关于函数 $f(x)$ 的四个结论中正确的有 ()

A. $f(x)$ 为偶函数;

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称;

C. 方程 $f(x) = 1 - |x|$ 有两个不等实根;

D. $f(\frac{1}{2}) < f(\frac{22}{3})$

12. 已知函数 $f(x) = xe^x + ax$. 则下列说法正确的是 ()

A. 当 $a = 0$ 时, $f(x)_{\min} = -\frac{1}{e}$

B. 当 $a = 1$ 时, 直线 $y = 2x$ 与函数 $f(x)$ 的图像相切

C. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $a \geq 0$

D. 若在区间 $[0, 1]$ 上 $f(x) \leq x^2$ 恒成立, 则 $a \leq 1 - e$

三、填空题

13. 若 $a > 0$, $b > 0$ 且 $a + 2b - 4 = 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为_____.

14. 若函数 $f(x) = \log_4(4^x + 1) - kx$ 为偶函数, 则 $k =$ _____.

15. 在三棱锥 $D-ABC$ 中, $AD \perp$ 平面 ABC , $AC = 3$, $BC = \sqrt{17}$, $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$,

若三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{7}}{3}$, 则此三棱锥的外接球的体积为_____

16. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 R , 对于任意的 x 有 $f(x+4) = 3f(x)$, 当 $x \in [-2, 2]$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{e}\right)^{|x+1|}, & x \in [-2, 0] \\ |\lg x|, & (0, 2] \end{cases}, \text{ 则 } f(4) = \underline{\hspace{2cm}}; \text{ 当 } x \in (2, 6] \text{ 时, } f(x) \geq t^2 - 4t$$

恒成立, 则 t 的取值范围是_____.

四、解答题

17. 已知函数 $f(x) = x^2$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$

(1) 若对 $\forall x \in [0, 2]$, $g(x) \geq 1$ 成立, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $\forall x_1 \in [0, 2]$, $\exists x_2 \in [-1, 3]$, 使得 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1$.

(1) 求 $y = f(x)$ 的最大值及取得最大值时相应的 x 值;

(2) 将 $y = f(x)$ 图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 然后再向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位得到

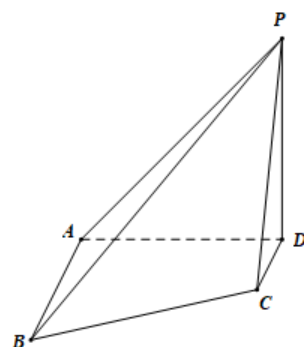
$y = g(x)$, 若 $g\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{6}{5}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\sin \theta$ 的值.

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $\angle DAB = \frac{\pi}{2}$ ，

$$\angle ABC = \frac{\pi}{3}, AB = 2DC = 2, PD = \sqrt{3}, PA = \sqrt{6}, CD \perp PD.$$

(1) 求证：平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的大小.



20. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\sqrt{3}a \cos C - c \sin A = \sqrt{3}b$.

(1) 求 A ；

(2) 若 $c = 2$ ，且 BC 边上的中线长为 $\sqrt{3}$ ，求 b 。

21. 随着应用型芯片不断使用 7nm，甚至 5nm 技术，软件升级加快，电子产品更新换代周期在缩小。某手机专卖店对本店一直专卖的 A, B 两款手机进行跟踪调查。随机抽取了几年前本店同期售出的两款手机各 20 台，它们的使用时间(单位：年)如下表：

使用时间(年)		2	3	4	5
手机品牌	A(台)	2	8	6	4
	B(台)	2	8	5	5

(1) 在这 40 台手机中，A, B 两款手机各随机抽取一台，将频率视为概率，求这两台手机使用时间都不超过 4 年的概率；

(2) 在这 40 台使用时间超过 3 年的手机中随机抽取 3 台，这 3 台手机中使用 4 年的台数为 X ，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ 。

22. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (2a+4)x + 4\ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 已知 $g(x) = -(3a+1)x + \frac{11}{2}\ln x$ ，若函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 图像有两个交点，

求 a 的取值范围.

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第一学期高三数学周末练习（五）答案

一、单项选择题：ADAD CABA

5. 解：正三棱锥 $S-ABC$ 中， $SA=2$ ， $AB=2\sqrt{2}$ ，

所以 $SA^2+SB^2=AB^2$ ，故 $SA\perp SB$ ，同理可得 $SA\perp SC$ ， $SB\perp SC$ ，

以 SA, SB, SC 为棱构造正方体，则该棱锥外接球即为该正方体的外接球，

如图，所以 $(2R)^2=2^2+2^2+2^2=12$ ，故球的表面积为 $S=4\pi R^2=12\pi$ ，故选：C

7. 【解】 $\because f(x+1)$ 奇函数， $\therefore f(x+1)=-f(-x+1)$ ，

$\because f(x+2)$ 偶函数， $\therefore f(x+2)=f(-x+2)$ ，

$\therefore f[(x+1)+1]=-f[-(x+1)+1]=-f(-x)$ ，即 $f(x+2)=-f(-x)$ ，

$\therefore f(-x+2)=f(x+2)=-f(-x)$ 。

令 $t=-x$ ，则 $f(t+2)=-f(t)$ ， $\therefore f(t+4)=-f(t+2)=f(t)$ ， $\therefore f(x+4)=f(x)$ 。

故函数 $y=f(x)$ 周期为 4 $\therefore f\left(\frac{14}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=-f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{10}{3}$ 故选：B

8. 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$ ，比较得 $a>b$ ；设 $g(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ ，比较得 $b>c$

二、多项选择题：ACD ACD AB ABD

10. 【解析】因为函数 $f(x)=2\cos^2 x-\cos(2x-\theta)$ 的图象经过点 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ，

所以 $\frac{3}{2}=2-\cos(-\theta)$ ，得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ ，因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$ ，

所以 $f(x)=2\cos^2 x-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + 1 = \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1,$$

因为 $y = \cos x$ 图象的对称中心是点 $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0 \right) (k \in \mathbf{Z})$,

$$\text{所以令 } \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \\ y - 1 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \\ y = 1 \end{cases},$$

当 $k = 0$ 时, $x = \frac{\pi}{12}$, 所以点 $\left(\frac{\pi}{12}, 1 \right)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 所以 A 正确;

因为函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 所以 B 错误;

因为 $-1 \leq \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 2, 所以 C 正确;

因为 $y = \cos x$ 图象的对称轴方程是 $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$$\text{所以令 } 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 得 } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

当 $k = 1$ 时, $x = \frac{\pi}{3}$, 所以直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 D 正确,

故选 ACD.

11. 解: 对于 A, 由题意知 $f(x+2) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 2 的函数;

$$\text{当 } x \in [-1, 1] \text{ 时, } f(x) = e^{1-|x|} - 2, f(-x) = e^{1-|-x|} - 2 = e^{1-|x|} - 2 = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数, A 正确;

对于 B, $f(x)$ 是偶函数, 对称轴是 $x = 0$, 又 $f(x)$ 是周期为 2 的函数,

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, B 正确;

对于 C, 方程 $f(x) = 1 - |x|$ 化为 $e^{1-|x|} - 2 = 1 - |x|$, 设 $t = 1 - |x|$, 则方程化为

$e^t = 2 + t, t \in [0, 1]$; 由函数 $y = e^t$ 和 $y = 2 + t, t \in [0, 1]$ 的图象知, 图象没有交点, 方程无实数根, C 错误;

对于 D, $f(x)$ 是周期为 2 的函数, 且为偶函数, 在 $[0, 1]$ 上是单调递减函数;

$$\text{所以 } f\left(\frac{22}{3}\right) = f\left(\frac{22}{3} - 8\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right);$$

又 $0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{2}{3}\right)$, 即 $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{22}{3}\right)$, 所以 D 错误.

综上知, 正确的命题是 A B

12. 【答案】ABD

【解析】当 $a=0$ 时, $f(x) = xe^x$, $f'(x) = (x+1)e^x$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(-1) = -\frac{1}{e}$, A 正确;

当 $a=1$ 时, $f(x) = xe^x + x$, $f'(x) = (x+1)e^x + 1$, $f'(0) = 2$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线为 $y=2x$, B 正确;

$f(x) = xe^x + ax$, $f'(x) = (x+1)e^x + a$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则在区间 $[0, +\infty)$ 上 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $a \geq -(x+1)e^x$, 令 $g(x) = -(x+1)e^x$, $g'(x) = -(x+2)e^x$, 在区间 $[0, +\infty)$ 上 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x) = -(x+1)e^x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $g(x)_{\max} = g(0) = -1$, 所以 $a \geq -1$, 故 C 错误;

当 $x=0$ 时, $a \in \mathbf{R}$ 恒成立; 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) \leq x^2$ 恒成立, 等价于 $e^x + a \leq x$ 即 $a \leq x - e^x$ 恒成立.

令 $h(x) = x - e^x$, $h'(x) = 1 - e^x$, 此时, $h'(x) < 0$ 恒成立, 所以 $h(x) = x - e^x$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, $h(x)_{\min} = h(1) = 1 - e$, 即 $a \leq 1 - e$, D 对.

三、填空题: 13. $\frac{9}{4}$ 14. $\frac{1}{2}$ 15. $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ 16. $-\frac{3}{e}$, $[1, 3]$

14. 因为 $f(x) = \log_4(4^x + 1) - kx$, 定义域 $x \in \mathbf{R}$, 又

$$f(-x) = \log_4(4^{-x} + 1) + kx = \log_4(4^x + 1) - x + kx,$$

由 $f(x) = f(-x)$, 则 $-kx = -x + kx$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 故 $-k = -1 + k$, 解得 $k = \frac{1}{2}$,

15. 【解析】设三棱锥外接球的半径为 R 、球心为 O ， $\triangle ABC$ 的外心为 O_1 、外接圆的半径为 r ，连接 AO_1 ，

过 O 作平行线 OE 交 AD 于 E ，连接 OA ， OD ，如图所示，则 $OA = OD = R$ ， $O_1A = r$ ， $OE \perp AD$ ，所以 E 为 AD 的中点。

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $2r = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{\sqrt{17}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ ，解得 $r = \frac{3\sqrt{34}}{8}$ 。

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$ ，可得

$$17 = AB^2 + 9 - 6 \cdot AB \cdot \frac{1}{3}, \text{ 得 } AB = 4.$$

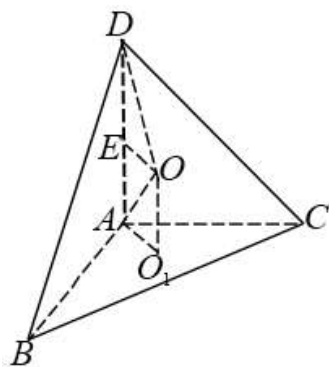
$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}.$$

因为 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot AD = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{2} \times AD = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ ，所以 $AD = \frac{\sqrt{14}}{4}$ 。连接 OO_1 ，又

$OO_1 \parallel AD$ ，所以四边形 EAQ_1O 为平行四边形，

$$EA = OO_1 = \frac{1}{2} AD = \frac{\sqrt{14}}{8}, \text{ 所以 } R = \sqrt{OO_1^2 + AO_1^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{8}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{24}}{8}\right)^2} = \sqrt{5}.$$

所以该三棱锥的外接球的体积 $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{5})^3 = \frac{20\sqrt{5}}{3} \pi$ 。故答案为： $\frac{20\sqrt{5}}{3} \pi$ 。



四、解答题

17. 解: (1) 因为函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减,

由题意可得 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{1}{4} - m \geq 1$, 解得 $m \leq -\frac{3}{4}$;

(2) 因为函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减,

则 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{1}{4} - m$, $g(x)_{\max} = g(0) = 1 - m$,

由题意可知, 函数 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 的值域是函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的值域的子集,

所以, $\left[\frac{1}{4} - m, 1 - m\right] \subseteq [0, 9]$, 所以, $\begin{cases} \frac{1}{4} - m \geq 0 \\ 1 - m \leq 9 \end{cases}$, 解得 $-8 \leq m \leq \frac{1}{4}$.

18. 解: (1) $f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2} - 1 = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

令 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

即当 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时函数取得最大值且 $f(x)_{\max} = 2$;

(2) $y = f(x)$ 图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 得到 $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$,

再将 $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位得到

$y = 2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos \frac{1}{2}x$ 即 $g(x) = 2\cos \frac{1}{2}x$,

因为 $g\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{6}{5}$, 所以 $2\cos\frac{1}{2}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{6}{5}$, 即 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, 因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\theta + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$, 且 $\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 所以 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$, 所以

$$\sin\theta = \sin\left[\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$$

19. 【解】(1)如图,过 C 作 $CF \perp AB$ 于 F . 由题意可知,在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = \frac{\pi}{2}$,

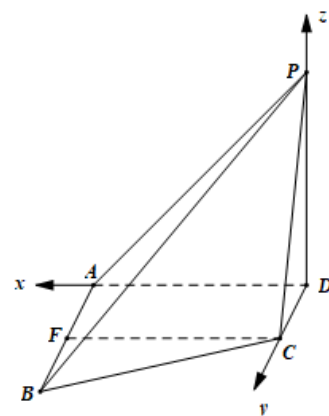
$$\angle ABC = \frac{\pi}{3}, AB = 2DC = 2, \text{ 所以 } AF = BF = DC = 1,$$

$$AD = CF = \sqrt{3}. \text{ 又 } PD = \sqrt{3}, PA = \sqrt{6}, \text{ 所以 } PA^2 = AD^2 + PD^2,$$

所以 $AD \perp PD$.

因为 $CD \perp PD$, 又 $AD \cap DC = D$, 所以 $PD \perp$ 面 $ABCD$.

因为 $PD \subset$ 面 PAD , 所以面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$.



(2) 由 (1) 可知, PD, DA, DC 两两垂直, 故可以 D 点为坐标原点, 以 DA, DC, DP 分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

$$\text{易知 } A(\sqrt{3}, 0, 0), B(\sqrt{3}, 2, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), C(0, 1, 0),$$

$$\text{则 } \vec{AB} = (0, 2, 0), \vec{PB} = (\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}), \vec{PC} = (0, 1, -\sqrt{3}).$$

设平面 APB 的法向量为 $\vec{\mu} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{\mu} = 2y_1 = 0, \\ \vec{PB} \cdot \vec{\mu} = \sqrt{3}x_1 + 2y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases} \text{ 令 } x_1 = 1, \text{ 则 } y_1 = 0, z_1 = 1, \text{ 即 } \vec{\mu} = (1, 0, 1).$$

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \vec{v} = y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0, \\ \overrightarrow{PB} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}x_2 + 2y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases} \text{令 } z_2 = 1, \text{ 则 } y_2 = \sqrt{3}, x_2 = -1, \text{ 即 } \vec{v} = (-1, \sqrt{3}, 1).$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{\mu}, \vec{v} \rangle = \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{v}}{|\vec{\mu}| |\vec{v}|} = 0, \quad \text{即二面角 } A-PB-C \text{ 的大小为 } \frac{\pi}{2}.$$

20. (1) 因为 $\sqrt{3}a \cos C - c \sin A = \sqrt{3}b$, 由正弦定理可得 $\sqrt{3} \sin A \cos C - \sin C \sin A = \sqrt{3} \sin B$,

因为 $B = \pi - A - C$, 所以 $\sqrt{3} \sin A \cos C - \sin C \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos C + \sqrt{3} \cos A \sin C$,

可得 $-\sin C \sin A = \sqrt{3} \cos A \sin C$, 因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\sin A = -\sqrt{3} \cos A$,

可得 $\tan A = -\sqrt{3}$, 又因为 $A \in (0, \pi)$, 可得 $A = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + 4 + 2b$, ①

又在 $\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 4 - b^2}{4a}$, 设 BC 的中点为 D ,

在 $\triangle ABD$ 中, $\cos B = \frac{(\frac{a}{2})^2 + c^2 - AD^2}{2 \times \frac{a}{2} \times c} = \frac{\frac{a^2}{4} + 1}{2a}$,

可得 $\frac{a^2 + 4 - b^2}{4a} = \frac{\frac{a^2}{4} + 1}{2a}$, 可得 $a^2 + 4 - 2b^2 = 0$, ②

由①②可得 $b^2 - 2b - 8 = 0$, 解得 $b = 4$.

21. (1) 设 M = “抽取的一台 A 款手机的使用时间不超过 4 年”, N = “抽取的一台 B 款手机的使用时间不超过 4 年”, S = “这两台手机使用时间都不超过 4 年”, 则事件 M 、 N 相互独立, 且 $S = MN$.

由表可知 $P(M) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, $P(N) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$,4 分

$$\therefore P(S) = P(MN) = P(M) \cdot P(N) = \frac{3}{5},$$

即这两台手机使用时间都不超过 4 年的概率为 $\frac{3}{5}$6 分

(2) 这 40 台手机中使用时间超过 3 年的有 20 台, 从中随机抽取 3 台, 共有 C_{20}^3 种不同结果, 其中使用 4 年的手机 11 台.7 分

$\therefore X = 0, 1, 2, 3$.

$$\therefore P(X=0) = \frac{C_9^3}{C_{20}^3} = \frac{28}{380} = \frac{7}{95}, \quad P(X=1) = \frac{C_{11}^1 C_9^2}{C_{20}^3} = \frac{132}{380} = \frac{33}{95},$$

$$P(X=2) = \frac{C_{11}^2 C_9^1}{C_{20}^3} = \frac{165}{380} = \frac{33}{76}, \quad P(X=3) = \frac{C_{11}^3}{C_{20}^3} = \frac{55}{380} = \frac{11}{76}.$$

$\therefore X$ 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{95}$	$\frac{33}{95}$	$\frac{33}{76}$	$\frac{11}{76}$

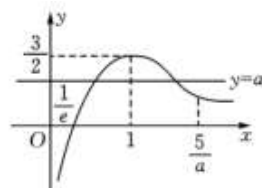
.....10 分

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{7}{95} + 1 \times \frac{33}{95} + 2 \times \frac{33}{76} + 3 \times \frac{11}{76} = 1.65. \quad \text{.....12 分}$$

22.

解: (1) $f'(x) = 2ax - (2a+4)x + \frac{4}{x}$

$$= \frac{2ax^2 - (2a+4)x + 4}{x} = \frac{2(x-1)(ax-2)}{x} \quad \text{..... (2 分)}$$



①若 $a \leq 0$ 时,

当 $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 当 $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减; (3 分)

②若 $0 < a < 2$ 时, 则 $\frac{2}{a} > 1$,

当 $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 当 $x \in (1, \frac{2}{a})$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;

当 $x \in (\frac{2}{a}, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增 (4 分)

③若 $a = 2$ 时, 则 $\frac{2}{a} = 1$, $x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 递增; (5 分)

④若 $a > 2$ 时, $0 < \frac{2}{a} < 1$,

当 $x \in (0, \frac{2}{a})$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 当 $x \in (\frac{2}{a}, 1)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;

当 $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; (6 分)

(2)由 $f(x)=g(x)$ 得 $ax^2-(2a+4)x+4\ln x=-(3a+1)x+\frac{11}{2}\ln x$,

即 $ax^2+(a-3)x-\frac{3}{2}\ln x=0$, 即 $a(x^2+x)=3x+\frac{3}{2}\ln x$, 所以 $a=\frac{3x+\frac{3}{2}\ln x}{x^2+x}$ (8 分)

令 $h(x)=\frac{3x+\frac{3}{2}\ln x}{x^2+x}$, 问题等价于直线 $y=a$ 与函数 $h(x)$ 的图像有两个交点

$$h'(x)=\frac{-3(x+\frac{1}{2})(\ln x+x-1)}{(x^2+x)^2},$$

令 $m(x)=\ln x+x-1$, 显然 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增, $m(1)=0$,

即 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 递减,

$$\text{故 } h(x)_{\text{极大}} = h(1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } h(x) = \frac{3x+\frac{3}{2}\ln x}{x^2+x} > \frac{3x}{x^2+x} > 0,$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, 取 } x = \frac{1}{e}, h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3 \cdot \frac{1}{e} + \frac{3}{2} \ln \frac{1}{e}}{\left(\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{e}} = \frac{\frac{3}{e} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e}} < 0$$

故符合题意的必要条件是: $0 < a < \frac{3}{2}$ (10 分)

$$\text{又当 } 0 < a < \frac{3}{2}, \text{ 由 } \frac{5}{a} > 1, \text{ 而 } h\left(\frac{5}{a}\right) = \frac{3 \cdot \frac{5}{a} + \frac{3}{2} \ln \frac{5}{a}}{\left(\frac{5}{a}\right)^2 + \frac{5}{a}} < \frac{3 \cdot \frac{5}{a} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{a}}{\left(\frac{5}{a}\right)^2 + \frac{5}{a}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{a} + 1} < \frac{9}{10} a < a$$

这说明, 在两个交点的横坐标位于区间 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 和 $\left(1, \frac{5}{a}\right)$ 内, 所以 $0 < a < \frac{3}{2}$ 是充分的.

故符合题意的必要条件是: $0 < a < \frac{3}{2}$ (12 分)