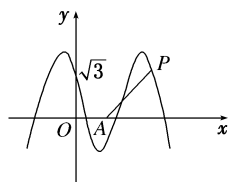


江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练 (1) 9.6

班级 _____ 姓名 _____

1. 如图, 函数 $y=2\cos(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$) 的部分图象与 y 轴交于点 $(0, \sqrt{3})$, 最小正周期是 π .



(1) 求 ω , φ 的值;

(2) 已知点 $A(\frac{\pi}{2}, 0)$, 点 P 是该函数图象上一点, 点 $Q(x_0, y_0)$ 是 PA 的中点, 当 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, 求 x_0 的值.

2. 已知函数 $f(x) = a^x - 2\sqrt{4 - a^x} - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)。

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域；

(2) 是否存在实数 a ，使得函数 $f(x)$ 满足：对于任意 $x \in [-1, +\infty)$ ，都有 $f(x) \leq 0$ ？若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由。

3. 图 1 是某斜拉式大桥图片，为了了解桥的一些结构情况，学校数学兴趣小组将大桥的结

构进行了简化，取其部分可抽象成图 2 所示的模型，其中桥塔 AB 、 CD 与桥面 AC 垂直，通过测量得知 $AB=50m$ ， $AC=50m$ ，当 P 为 AC 中点时， $\angle BPD=45^\circ$.

(1) 求 CD 的长；

(2) 试问 P 在线段 AC 的何处时， $\angle BPD$ 达到最大.



图 1

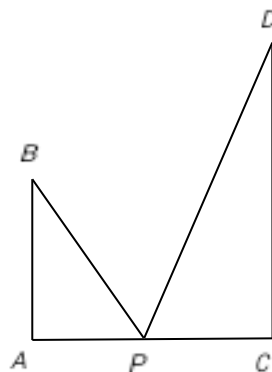


图 2

4. 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的导函数为 $f'(x)$ ，已知 x_1, x_2 是 $f'(x)$ 的两个不同

的零点.

(1) 证明： $a^2 > 3b$ ；

(2) 当 $b=0$ 时，若对任意 $x>0$ ，不等式 $f(x) \geq x \ln x$ 恒成立，求 a 的取值范围；

中档大题训练 (1) 答案 9.6

1. 解: (1) 将点 $(0, \sqrt{3})$ 代入 $y = 2\cos(\omega x + \varphi)$, 得 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\because 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$.
 $\because$ 最小正周期 $T = \pi$, 且 $\omega > 0$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

(2) 由 (1) 知 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. $\therefore A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $Q(x_0, y_0)$ 是 PA 中点, $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore P\left(2x_0 - \frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\right)$.

又 $\because$ 点 P 在 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上, $\therefore 2\cos\left(4x_0 - \pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, $\therefore \cos\left(4x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\because x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\therefore 4x_0 + \frac{\pi}{6} \in \left[2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}\right]$, $\therefore 4x_0 + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$ 或 $4x_0 + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$, $\therefore x_0 = \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$.

2. 【解析】(1) 由 $4 - a^x \geq 0$ 得 $a^x \leq 4$, 当 $0 < a < 1$ 时, $x \geq \log_a 4$; 当 $a > 1$ 时,

$x \leq \log_a 4$, 故当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[\log_a 4, +\infty)$; 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, \log_a 4]$.

令 $t = \sqrt{4 - a^x}$, 则 $0 \leq t < 2$, $f(x) = g(t) = 4 - t^2 - 2t - 1 = -(t+1)^2 + 4$, 当 $0 \leq t < 2$ 时, $g(t)$ 是减函数, 故有 $g(2) < f(x) \leq g(0)$, 即 $-5 < f(x) \leq 3$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(-5, 3]$.

若存在实数 a , 使得对于任意 $x \in [-1, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq 0$, 则 $[-1, +\infty)$ 是定义域的子集, 由 (1) 得 $a > 1$ 不满足条件; 因而只能有 $0 < a < 1$, 且 $\log_a 4 \leq -1$, 即 $\frac{1}{4} \leq a < 1$, 令 $t = \sqrt{4 - a^x}$, 由 (1) 知 $f(x) = g(t) = -(t+1)^2 + 4$, 由 $f(x) \leq 0$ 得 $t \leq -3$ (舍去), 或

$t \geq 1$, 即 $\sqrt{4-a^x} \geq 1$, 解得 $a^x \leq 3$, 由是, 只须对任意 $x \in [-1, +\infty)$, $a^x \leq 3$ 恒成立, 而对

任意 $x \in [-1, +\infty)$, 由 $0 < a < 1$ 得 $a^x \leq a^{-1}$, 因而只要 $a^{-1} \leq 3$, 解得 $\frac{1}{3} \leq a < 1$ 。综上, 存在

$a \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$, 使得对于任意 $x \in [-1, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq 0$ 。

3. 【解析】(1) 设 $\angle BPA = \alpha$, $\angle DPC = \beta$, $CD = h$, 则 $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = \frac{h}{25}$,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{2 + \frac{h}{25}}{1 - 2 \cdot \frac{h}{25}} = -1$$

由题意得, , 解 $CD = h = 75$ 6 分

(2) 设 $AP = x (0 < x < 50)$, 则 $\tan \alpha = \frac{50}{x}$, $\tan \beta = \frac{75}{50-x}$,

$$\tan \angle BPD = -\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\frac{50}{x} + \frac{75}{50-x}}{1 - \frac{50}{x} \cdot \frac{75}{50-x}} = \frac{25(x+100)}{x^2 - 50x + 50 \cdot 75}$$

$\therefore$,8 分

$\because x^2 - 50x + 50 \cdot 75 > 0$, $\therefore \tan \angle BPD > 0$, 即 $\angle BPD$ 为锐角,

令 $t = x + 100 \in (100, 150)$, 则 $x = t - 100$,

$$\tan \angle BPD = \frac{25t}{(t-100)^2 - 50(t-100) + 50 \cdot 75} = \frac{25t}{t^2 - 250t + 50 \cdot 375},$$

$\therefore$

$$\tan \angle BPD = \frac{25}{t + \frac{50 \cdot 375}{t} - 250} \leq \frac{25}{2\sqrt{t \cdot \frac{50 \cdot 375}{t}} - 250} = \frac{1}{2\sqrt{30} - 10}$$

$\therefore$

,12 分

当且仅当 $t = \frac{50 \cdot 375}{t}$ 即 $t = 25\sqrt{30} \in (100, 150)$, $\therefore AP = 25\sqrt{30} - 100$ 时, $\angle BPD$ 最大.....14 分

4【解析】(1) 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的导函数为 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

已知 x_1, x_2 是 $f'(x)$ 的两个不同的零点, 设 $x_1 < x_2$,

所以 $\Delta = 4a^2 - 12b > 0$, 所以 $a^2 > 3b$ 得证.

(2) 当 $b = 0$ 时, 对任意 $x > 0$, $f(x) \geq x \ln x$ 恒成立,

所以 $x^3 + ax^2 \geq x \ln x$, 即 $x^3 + ax^2 - x \ln x \geq 0$, $x^2 + ax - \ln x \geq 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立,

所以 $a \geq \frac{\ln x}{x} - x$ 对任意 $x > 0$ 恒成立,

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x} - x$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2}$,

令 $h(x) = 1 - \ln x - x^2$, 则 $h'(x) = -\frac{1}{x} - 2x < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 注意到 $h(1) = 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以, 当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 有最大值 $g(1) = -1$,

所以 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.