期中热身练（3）

课标定位：椭圆、双曲线、抛物线

一、选择题（本题共 7 小题，其中 1~6 为单选题，第 7 题为多选题）

1、抛物线 $x^2=4y$ 上一点 P 到焦点的距离为 3，则点 P 到 y 轴的距离为(　A　)

A．$2\sqrt{2}$　　　　B．1

C．2　　　　D．3

2、已知双曲线 C：$\frac{x^2}{13-m}+\frac{y^2}{m-5}=1$ 的焦距为 8，则双曲线 C 的渐近线方程为（　B　）

A．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　　　B．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 或 $y=\pm\sqrt{3}x$

C．$y=\pm 2x$　　　　D．$y=\pm\frac{1}{2}x$ 或 $y=\pm 2x$

3、曲线 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 与曲线 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=k(k>0)$ 的（ D ）

A．长轴长相等　　　　B．短轴长相等

C．焦距相等　　　　D．离心率相等

4、某人造地球卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆，其轨道的离心率为 e，设地球半径为 R，该卫星近地点离地面的距离为 r，则该卫星远地点离地面的距离为（　A　）

A．$\frac{1+e}{1-e}r+\frac{2e}{1-e}R$　　　　B．$\frac{1+e}{1-e}r+\frac{e}{1-e}R$

C．$\frac{1-e}{1+e}r+\frac{2e}{1+e}R$　　　　D．$\frac{1-e}{1+e}r+\frac{e}{1+e}R$

5、已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 是 C 的右支上一点，连接 PF_1 与 y 轴交于点 M，若$|F_1O|=2|OM|$（O 为坐标原点），$PF_1\perp PF_2$，则双曲线 C 的渐近线方程为（　C　）

A．$y=\pm 3x$　　B．$y=\pm\sqrt{3}x$　　C．$y=\pm 2x$　　D．$y=\pm\sqrt{2}x$

6、已知实数 4，m，9 成等比数列，则圆锥曲线 $\frac{x^2}{m}+y^2=1$ 的离心率为　　　（　C　）.

A. $\frac{\sqrt{30}}{6}$　　B. $\sqrt{7}$　　C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$ 或 $\sqrt{7}$　　D. $\frac{5}{6}$ 或 7

7、下列说法正确的是（　AC　）

A．方程 $x^2+xy=x$ 表示两条直线

B．椭圆 $\dfrac{x^2}{10-m}+\dfrac{y^2}{m-2}=1$ 的焦距为 4，则 $m=4$

C．曲线 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=xy$ 关于坐标原点对称

D．双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{a}{b}x$

二、填空题（本大题共 4 小题）

8、双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的右焦点与抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点连线垂直于双曲线的一条渐近线，则 p 的值为______. $\dfrac{40}{3}$

9、抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 过圆 $x^2+y^2-4x+8y+19=0$ 的圆心， $A(3,m)$ 为抛物线上一点，则 A 到抛物线焦点 F 的距离为____. 5

10、如图，一圆形纸片的圆心为 O，F 是圆内一定点，M 是圆周上一动点，把纸片折叠使 M 与 F 重合，然后抹平纸片，折痕为 CD，设 CD 与 OM 交于点 P，则点 P 的轨迹是________.

11、已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{8}=1$（$a$>0），$F_1$，$F_2$ 是 C 的左右焦点，P 是双曲线 C 右支上任意一点，若 $\dfrac{|PF_1|^2}{|PF_2|}$ 的最小值为 8，则双曲线 C 的离心率为______. 3

三、解答题（本大题共 2 小题）

12、已知椭圆 Ω：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{6}$，短轴长为 $2\sqrt{2}$.

（1）求 Ω 的方程;

（2）直线 l_1：$y=kx+m$（$k\neq0$）与 Ω 相切于点 M，l_1 与两坐标轴的交点为 A 与 B，直线 l_2 经过点 M 且与 l_1 垂直，l_2 与 Ω 的另一个交点为 N. 当 AB 取得最小值时，求△ABN 的面积.

【解答】（1）由题意可知 $2c=2\sqrt{6}$，$2b=2\sqrt{2}$，即 $c=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，

所以 $a^2=b^2+c^2=8$，

所以 Ω 的方程 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$；

（2）易知 l_1 的斜率存在，所以可设 l_1 的方程为 $y=kx+m$，（$k\neq0$）.

联立$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，消去 y，得（$1+4k^2$）$x^2+8kmx+4m^2-8=0$．

因为直线 l_1 与 Ω 相切，所以△＝（$8km$）$^2-4$（$1+4k^2$）（$4m^2-8$）＝0．

即 $m^2=8k^2+2$．

l_1 在 x 轴，y 轴上的截距分别是 $-\frac{m}{k}$，m．

则 $|AB|=\sqrt{(-\frac{m}{k})^2+m^2}=\sqrt{m^2(\frac{1}{k^2}+1)}=\sqrt{(8k^2+2)(\frac{1}{k^2}+1)}=$

$\sqrt{8k^2+\frac{2}{k^2}+10}\geq\sqrt{8+10}=3\sqrt{2}$.

当且仅当 $8k^2=\frac{2}{k^2}$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$m=\sqrt{6}$，此时 $2x_M=-\frac{8km}{1+4k^2}=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$．

即 $x_M=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$，从而 $y_M=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

联立$\begin{cases} y-\frac{\sqrt{6}}{3}=-\sqrt{2}(x+\frac{4\sqrt{3}}{3}) \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，消去 y，得 $9x^2+16\sqrt{3}x+16=0$，

则 $x_M+x_N=-\frac{4\sqrt{3}}{3}+x_N=-\frac{16\sqrt{3}}{9}$，解得 $x_N=-\frac{4\sqrt{3}}{9}$．

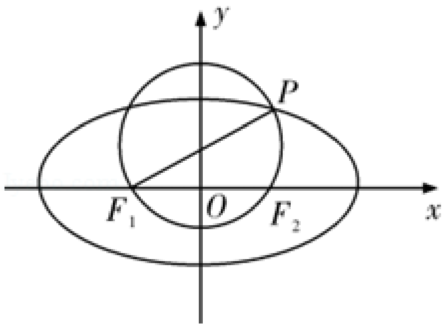
所以$|MN|=\sqrt{1+2}|x_M-x_N|=\frac{8}{3}$．

故△ABC 的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

13、如图，已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与圆 E：$x^2+y^2-\frac{y}{2}-3=0$在第一象限相交于点 P，椭圆 C 的左、右焦点 F_1，F_2 都在圆 E 上，且线段 PF_1 为圆 E 的直径．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设过点$M(0,\sqrt{\frac{3}{5}})$的动直线 1 与椭圆 C 交于 A，B 两点，O 为坐标原点，证明：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$为定值，并求出这个定值．



【解答】（1）在圆 E 中，令 $y=0$ 可得 $x=\pm\sqrt{3}$，所以由题意可得 $c=\sqrt{3}$，

由圆的方程可得圆的半径为$\frac{7}{4}$，所以由题意可得 $PF_1|=\frac{7}{2}$，

连接 PF_2，因为 F_2 在圆上，所以 $PF_2\perp F_1F_2$，

又有$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}$，则$|PF_1|=\sqrt{|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}=\sqrt{\frac{49}{4}-12}=\frac{1}{2}$，

由题意的定义可得：$2a=|PF_1|+|PF_2|$，可得 $a=2$，$b^2=a^2-c^2=1$，

所以椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）当直线的斜率存在时设 l 的斜率为 k，则 l 的方程为：$y=kx+\sqrt{\frac{3}{5}}$，代入椭圆的方程可得：

$x^2+4\left(kx+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=4$，即$(1+4k^2)x^2+8\sqrt{\frac{3}{5}}kx-\frac{8}{5}=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{8k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=-\frac{8}{5(1+4k^2)}$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\left(kx_1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(kx_2+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=(1+k^2)x_1x_2+\sqrt{\frac{3}{5}}k(x_1+x_2)+\frac{3}{5}$

$=-\frac{8(1+k^2)}{5(1+4k^2)}-\frac{24k^2}{5(1+4k^2)}+\frac{3}{5}$

$=-\frac{8(1+4k^2)}{5(1+4k^2)}+\frac{3}{5}=-1$；

当直线 l 的斜率不存在时，直线与 y 轴重合，此时点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$，

综上所述：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$ 为定值．