竞赛之窗

2020年全国高中数学联赛福建赛区预赛

中图分类号:G424.79 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2021)02-0020-07

一、填空题(每小题6分,共60分)

1. 已知复数 z 满足

$|z-1|=|z-\mathrm{i}|$.

若 $z-\dfrac{z-6}{z-1}$ 为正实数,则 $z=$______.

2. 已知

$f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,|\varphi|<\pi)$.

若 $f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=0$, $f\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)=3$,且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π,则 $\varphi=$______.

3. 已知 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数,集合

$A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$,

$B=\{x\mid 2x^2-3[x]-5=0\}$.

则 $A\cap B=$______.

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且对任意实数 x,均有 $f(x+1)=f(1-x)$ 成立,当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时, $f(x)=\ln x$. 若关于 x 的方程 $f(x)+ax-1=0$ 在 $x\in[3,5]$ 上有两个不相等的实数根,则 a 的取值范围是______.

5. 设 F_1、F_2 为

双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$

的左、右焦点,过 F_2 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A、B 两点,且

$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$, $\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{F_2A}=\mathbf{0}$.

则双曲线 C 的离心率为______.

6. 在以凸18边形的顶点为顶点构成的三角形中,任取一个三角形,则所取的三角形与该18边形无公共边的概率为______.

7. 如图1,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E、F、G 分别在棱 AA_1、A_1D_1、D_1C_1 上, E 为 AA_1 的中点,

$$\frac{D_1F}{D_1A_1}=\frac{D_1G}{D_1C_1}=\frac{1}{3}.$$

记平面 EFG 与平面 A_1B_1CD 的交线为 m. 则直线 m 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为______.

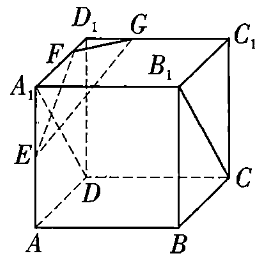

图1

8. 已知 a、b、c、d 为正数,且

$a+20b=c+20d=2$.

则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{bcd}$ 的最小值为______.

9. 已知实数 m 满足当关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时,

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant ma^2$

总成立. 则 m 的最大值为______.

10. 设正整数 n 为合数, $f(n)$ 为 n 的最小的三个正约数之和, $g(n)$ 为 n 的最大的两个正约数之和. 若 $g(n)=f^3(n)$,则 n 的所有可能值为______.

二、解答题(每小题20分,共100分)

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足:

$a_1=1$, $a_2=5$,

$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n\ (n\in\mathbf{Z}_+)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=\dfrac{3^n}{a_na_{n+1}}$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和,证明: $T_n<\dfrac{3}{4}$.

12. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的

万方数据

离心率为$\frac{1}{2}$，右焦点 F 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，A_1、A_2 分别为椭圆 C 的左、右顶点.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)过点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点(点 A 在 x 轴上方)，T 为直线 A_1A、A_2B 的交点. 当点 T 的纵坐标为 $6\sqrt{3}$ 时，求直线 l 的方程.

13. 如图 2，在$\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot I$ 与边 BC、CA 分别切于点 D、E，联结 AI 并延长，与$\triangle ABC$ 的外接圆$\odot O$ 交于点 N，联结 ND、NO 并延长，分别与$\odot O$ 交于点 G、M，联结 GE 并延长，与$\odot O$ 交于点 F.

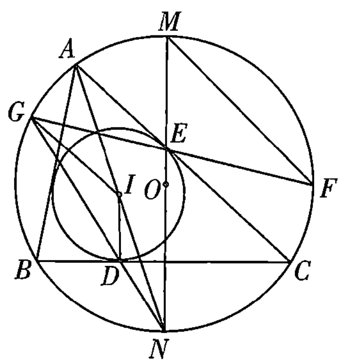

图 2

证明：(1)$\triangle NIG \backsim \triangle NDI$；

(2)$MF // AC$.

14. 已知$f(x)=(x^2+(a-1)x+1)e^x$. 若$f(x)+e^2 \geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

15. 将一个 2 020 × 2 020 方格表的每个格染黑、白两种颜色之一，满足以下条件：方格表中的任意一个格 A，它所在的行与列的所有格中，与 A 异色的格多于与 A 同色的格. 证明：染色后，方格表中每行、每列两种颜色的格一样多.

参 考 答 案

一、**1.** $2+2\mathrm{i}$.

由题意，知 z 的实部与虚部相等.

设 $z=x+x\mathrm{i}(x\in\mathbf{R})$. 则

$$z-\frac{z-6}{z-1}=z-1+\frac{5}{z-1}$$

$$=x+x\mathrm{i}-1+\frac{5}{x+x\mathrm{i}-1}$$

$$=(x-1)+x\mathrm{i}+\frac{5((x-1)-x\mathrm{i})}{(x-1)^2+x^2}$$

$$=(x-1)+\frac{5(x-1)}{(x-1)^2+x^2}+\left(x-\frac{5x}{(x-1)^2+x^2}\right)\mathrm{i}.$$

由 $z-\frac{z-6}{z-1}$为正实数知

$$(x-1)+\frac{5(x-1)}{(x-1)^2+x^2}>0,$$

且 $$x-\frac{5x}{(x-1)^2+x^2}=0.$$

解得 $x=2$.

因此，$z=2+2\mathrm{i}$.

2. $-\frac{11\pi}{12}$.

由$f\left(\frac{5\pi}{8}\right)=0$，$f\left(\frac{11\pi}{8}\right)=3$，得

$$\frac{5\pi}{8}\omega+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{11\pi}{8}\omega+\varphi=2m\pi, \quad ①$$

其中，k、$m\in\mathbf{Z}$.

两式相减得

$$\frac{3\pi}{4}\omega=2m\pi-k\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{4}{3}\left(2m-k-\frac{1}{2}\right)(m、k\in\mathbf{Z}).$$

又$f(x)$的最小正周期大于 2π，得

$$\frac{2\pi}{\omega}>2\pi \Rightarrow 0<\omega<1.$$

则 $$0<\frac{4}{3}\left(2m-k-\frac{1}{2}\right)<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}<2m-k<\frac{5}{4}.$$

由 m、$k\in\mathbf{Z}$，得 $2m-k=1$.

从而，$\omega=\frac{2}{3}$.

将 $\omega=\frac{2}{3}$代入式①得

$$\varphi=2m\pi-\frac{11\pi}{12}(m\in\mathbf{Z}).$$

万方数据

结合 $|\varphi|<\pi$，得 $\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$.

3. $\left\{-1,\dfrac{\sqrt{22}}{2}\right\}$.

易知，$A=(-2,3)$.

若 $x\in A$，则 $[x]=-2,-1,0,1,2$.

当 $[x]=-2$ 时，若 $x\in B$，则

$2x^2+6-5=0$,

x 不存在.

当 $[x]=-1$ 时，若 $x\in B$，则

$2x^2+3-5=0\Rightarrow x=\pm1$.

经检验，$x=1$ 不符合要求，$x=-1$ 符合要求.

当 $[x]=0$ 时，若 $x\in B$，则

$2x^2-0-5=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$,

均不符合要求.

当 $[x]=1$ 时，若 $x\in B$，则

$2x^2-3-5=0\Rightarrow x=\pm2$,

均不符合要求.

当 $[x]=2$ 时，若 $x\in B$，则

$2x^2-6-5=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{22}}{2}$.

经检验，$x=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$ 符合要求，$x=-\dfrac{\sqrt{22}}{2}$ 不符合要求.

故 $A\cap B=\left\{-1,\dfrac{\sqrt{22}}{2}\right\}$.

4. $\left(\dfrac{1-\ln 2}{4},\dfrac{1}{5}\right]$

如图 3，分别作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=-ax+1$ 的图像，其中，$P(0,1)$，$G\left(\dfrac{1}{a},0\right)$.

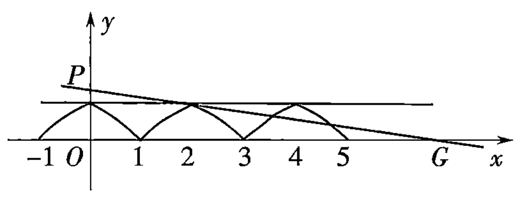

图 3

由图像，知当

$$\begin{cases}-4a+1<\ln 2,\\-5a+1\geqslant 0\end{cases}，即\dfrac{1-\ln 2}{4}<a\leqslant\dfrac{1}{5}$$

时，两函数图像在 $x\in[3,5]$ 上有两个不同的交点.

故 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1-\ln 2}{4},\dfrac{1}{5}\right]$.

5. $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

如图 4，设 $|AF_2|=t$.

依题意有

$|BF_2|=2t$,

$|AB|=3t$,

$|AF_1|=2a+t$,

$|BF_1|=2a+2t$.

由 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$

$\Rightarrow AF_1\perp AF_2$.

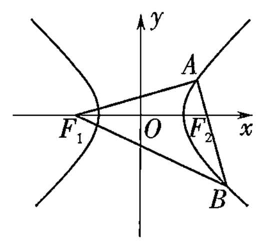

图 4

则 $\begin{cases}|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2,\\|AF_1|^2+|AB|^2=|F_1B|^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(2a+t)^2+t^2=(2c)^2,\\(2a+t)^2+(3t)^2=(2a+2t)^2\end{cases}$

$\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}a,c=\dfrac{\sqrt{17}}{3}a$

$\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

6. $\dfrac{91}{136}$.

以凸 18 边形的顶点为顶点的三角形个数为 C_{18}^3.

对于凸 18 边形的任意一个顶点 A，要取与凸 18 边形无公共边的三角形的一个顶点，则三角形的另两个顶点 B、C 不能为顶点 A 在凸 18 边形中的两条边的另两个顶点，只是其他 15 个顶点中的不相邻的两个顶点，共有 C_{15}^2-14 种不同的选取方法. 故与原凸 18 边形无公共边的三角形个数为 $\dfrac{1}{3}\times18(C_{15}^2-14)$.

万方数据

因此，所求的概率为

$$\frac{\frac{1}{3}\times 18\left(C_{15}^{2}-14\right)}{C_{18}^{3}}=\frac{91}{136}.$$

7. $\frac{3\sqrt{58}}{58}$.

如图 5，设 A_1D 与 EF 的交点为 P. 延长 GF、B_1A_1 交于点 Q，则 PQ 为平面 EFG 与平面 A_1B_1CD 的交线，设其为 m.

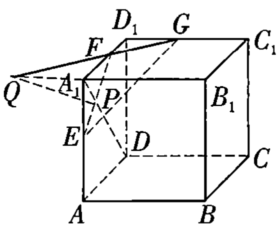

图 5

不妨设正方体棱长为 3，则由

$$\frac{D_1F}{D_1A_1}=\frac{D_1G}{D_1C_1}=\frac{1}{3}\Rightarrow A_1Q=A_1F=2.$$

作 $PH\perp A_1D_1$ 于点 H，则

$PH\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$.

联结 QH，则 $\angle PQH$ 为直线 PQ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角.

设 $PH=x$. 则 $A_1H=x$.

由 $\frac{PH}{EA_1}=\frac{FH}{FA_1}\Rightarrow\frac{x}{\frac{3}{2}}=\frac{2-x}{2}\Rightarrow x=\frac{6}{7}$.

故 $QH^2=QA_1^2+A_1H^2=2^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2$

$$\Rightarrow QH=\frac{2\sqrt{58}}{7}.$$

$$\Rightarrow \tan\angle PQH=\frac{PH}{QH}=\frac{3\sqrt{58}}{58}.$$

由平面 $ABCD$ // 平面 $A_1B_1C_1D_1$，知直线 PQ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$、平面 $ABCD$ 所成角相等. 从而，直线 m 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{3\sqrt{58}}{58}$.

8. $\frac{441}{2}$.

由条件知

$$0<cd=\frac{1}{20}\cdot c\cdot 20d\leqslant\frac{1}{20}\left(\frac{c+20d}{2}\right)^2=\frac{1}{20}.$$

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{bcd}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{20}{b}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{20}{b}\right)(a+20b)$$

$$=\frac{1}{2}\left(401+\frac{20b}{a}+\frac{20a}{b}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(401+2\sqrt{\frac{20b}{a}\cdot\frac{20a}{b}}\right)$$

$$=\frac{441}{2},$$

当且仅当 $c=20d$ 且 $\frac{20b}{a}=\frac{20a}{b}$，即

$$a=b=\frac{2}{21},c=1,d=\frac{1}{20}$$

时，上式等号成立.

故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{bcd}$ 的最小值为 $\frac{441}{2}$.

9. $\frac{9}{8}$.

设 $\mu=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}$，其中，$a$、$b$、$c$ 为实数，$a\neq 0$.

当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时，设其两个根为 x_1、x_2.

由韦达定理知

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

则 $\mu=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}$

$$=\left(1-\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-1\right)^2$$

$$=(1+x_1+x_2)^2+(-x_1-x_2-x_1x_2)^2+(x_1x_2-1)^2$$

$$=2(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)$$

$$\geqslant 2\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{8},$$

当且仅当 $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$，即 $a=b=4c\neq 0$ 时，上式等号成立.

故 μ 的最小值为 $\frac{9}{8}$.

万方数据

从而,m 的最大值为$\frac{9}{8}$.

10. 144.

设正整数 n 满足条件.

显然,n 的最小、最大的正约数分别为 1、n. 设 p 为 n 的最小素因子,则 n 的第二小、第二大的正约数分别为 p、$\frac{n}{p}$.

对于 n 的第三小的正约数,有以下两类情况:

(1)若第三小的正约数为 p^2,则

$p^2 \mid n, f(n)=1+p+p^2, g(n)=n+\frac{n}{p}$.

由 $p^2 \mid n$,知 $g(n)=n+\frac{n}{p}$为 p 的倍数,有

$g(n)\equiv 0(\bmod p)$.

又 $f(n)=1+p+p^2\equiv 1(\bmod p)$,

$f^3(n)\equiv 1(\bmod p)$,

于是,$g(n)\neq f^3(n)$,与条件不符.

(2)若第三小的正约数是某一素数 $q(q>p)$,则

$f(n)=1+p+q\equiv 1+p(\bmod q)$,

$f^3(n)\equiv(1+p)^3(\bmod q)$.

由 $pq\mid n$,知 $g(n)=n+\frac{n}{p}$为 q 的倍数,有

$g(n)\equiv 0(\bmod q)$.

于是,$(1+p)^3\equiv 0(\bmod q)$.

由 q 为素数,知 $q\mid(1+p)$.

于是,$p<q\leqslant 1+p$,符合条件的素数 p、q 只有 $p=2,q=3$. 此时,

$f(n)=6, g(n)=\frac{3n}{2}$.

由 $g(n)=f^3(n)$,得

$\frac{3n}{2}=6^3 \Rightarrow n=144$.

经验证,$n=144$ 符合要求.

故 n 的所有可能值为 $n=144$.

二、**11.** (1)由 $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$,得

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$.

又 $a_2-a_1=4\neq 0$,则数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为等比数列.

于是,$a_{n+1}-a_n=4\times 3^{n-1}$.

进而,$n\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+\\&\quad(a_2-a_1)+a_1\\&=4\times 3^{n-2}+4\times 3^{n-3}+\cdots+4+1\\&=\frac{4(1-3^{n-1})}{1-3}+1\\&=2\times 3^{n-1}-1.\end{aligned}$$

又 $n=1$ 时,$2\times 3^{n-1}-1=1=a_1$.

从而,对于一切正整数 n,均有

$a_n=2\times 3^{n-1}-1$.

(2)由(1)知

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{3^n}{a_na_{n+1}}\\&=\frac{3^n}{(2\times 3^{n-1}-1)(2\times 3^n-1)}\\&=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}-\frac{1}{2\times 3^n-1}\right).\end{aligned}$$

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$$\begin{aligned}&=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2\times 3-1}\right)+\\&\quad\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\times 3-1}-\frac{1}{2\times 3^2-1}\right)+\cdots+\\&\quad\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}-\frac{1}{2\times 3^n-1}\right)\\&=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{2\times 3^n-1}\right)<\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

12. (1)由右焦点 $F(c,0)$到 $x-y+2=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,知

$\frac{|c-0+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

结合 $c>0$,得 $c=2$.

又椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$,于是,

$a=2c=4, b=2\sqrt{3}$.

万方数据

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)如图 6.

易知,直线 l 的斜率不为 0,设 $l:x=my+2$.

联立椭圆 C 及直线 l 的方程得

$$(3m^2+4)y^2+12my-36=0. \quad ①$$

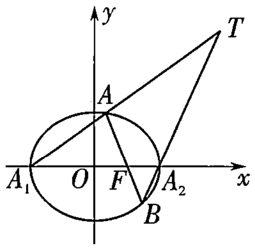

图 6

故方程①的判别式 $\Delta>0$,有两个不相等的实根.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$. 则

$$y_1+y_2=\frac{-12m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-36}{3m^2+4}.$$

设 $T(t,6\sqrt{3})$.

由 A_1、A、T 三点共线得

$$\frac{6\sqrt{3}-0}{t+4}=\frac{y_1-0}{x_1+4}$$

$$\Rightarrow t+4=\frac{6\sqrt{3}(x_1+4)}{y_1}=6\sqrt{3}\left(m+\frac{6}{y_1}\right).$$

由 A_2、B、T 三点共线得

$$\frac{6\sqrt{3}-0}{t-4}=\frac{y_2-0}{x_2-4}$$

$$\Rightarrow t-4=\frac{6\sqrt{3}(x_2-4)}{y_2}=6\sqrt{3}\left(m-\frac{2}{y_2}\right).$$

联立以上两式消去 t 得

$$8=6\sqrt{3}\left(\frac{6}{y_1}+\frac{2}{y_2}\right)\Rightarrow\frac{3}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

则$\frac{3}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{(y_1+y_2)+2y_2}{y_1y_2}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow\frac{-12m}{3m^2+4}+2y_2=\frac{2}{3\sqrt{3}}\times\frac{-36}{3m^2+4}.$$

故 $y_2=\frac{6m-4\sqrt{3}}{3m^2+4},y_1=\frac{-18m+4\sqrt{3}}{3m^2+4}$.

代入 $y_1y_2=\frac{-36}{3m^2+4}$得

$$\frac{-4(3m-2\sqrt{3})(9m-2\sqrt{3})}{(3m^2+4)^2}=\frac{-36}{3m^2+4}$$

$$\Rightarrow m=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因此,直线 l 的方程为 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}y+2$,即 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$.

13. (1)如图 7,联结 BN、BI、BG.

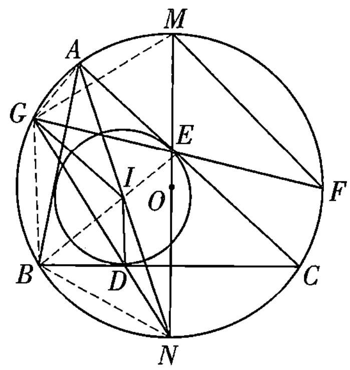

图 7

由 I 为$\triangle ABC$ 的内心知

$\angle NBI=\angle NBC+\angle CBI$

$=\angle NAC+\angle CBI=\angle BAI+\angle ABI$

$=\angle BIN$

$\Rightarrow NB=NI$.

又$\angle NGB=\angle NAB=\angle NAC=\angle NBD$,

$\angle BNG=\angle DNB$,

则$\triangle NBG\backsim\triangle NDB$

$$\Rightarrow\frac{NB}{NG}=\frac{ND}{NB}\Rightarrow\frac{NI}{NG}=\frac{ND}{NI}.$$

又$\angle ING=\angle DNI$,故

$\triangle NIG\backsim\triangle NDI$.

(2)联结 GA、GM.

由(1),得$\angle NGI=\angle NID$.

由 I 为$\triangle ABC$ 的内心

$\Rightarrow N$ 为弧$\overset{\frown}{BC}$的中点

$\Rightarrow MN\perp BC$.

又 $ID\perp BC$,则

$ID/\!/MN$

$\Rightarrow\angle NID=\angle ANM=\angle AGM$

$\Rightarrow\angle NGI=\angle AGM$

$\Rightarrow\angle AGI=\angle AGM+\angle MGI$

$=\angle NGI+\angle MGI=\angle MGN$

万方数据

$=90°$.

结合$\angle AEI=90°$得

A、G、I、E四点共圆

$\Rightarrow \angle AEG=\angle AIG=90°-\angle GAI$

$=90°-\angle GAN=90°-\angle GMN$

$=\angle MNG=\angle MFG$

$\Rightarrow MF /\!/ AC$.

14. 注意到,

$f'(x)=(2x+a-1)e^x+(x^2+(a-1)x+1)e^x$

$=(x+1)(x+a)e^x$.

设$g(x)=x^2+(a-1)x+1$.

(1)若$-1\leqslant a\leqslant 3$,则方程

$x^2+(a-1)x+1=0$

的判别式为$\Delta=(a-1)^2-4\leqslant 0$,此时,

$g(x)\geqslant 0$恒成立,

$f(x)+e^2=g(x)e^x+e^2\geqslant e^2>0$恒成立.

(2)若$a>3$,则

当$x<-a$或$x>-1$时,$f'(x)>0$;

当$-a<x<-1$时,$f'(x)<0$.

故$f(x)$在区间$(-\infty,-a]$、$[-1,+\infty)$上为增函数;在区间$[-a,-1]$上为减函数.

当$x\leqslant -a$时,

$g(x)=x^2+(a-1)x+1$

$=x(x+a)+1-x>0$,

$f(x)+e^2>0$

成立.

当$x>-a$时,$f(x)$的最小值为

$f(-1)=(3-a)e^{-1}$.

由$f(x)+e^2\geqslant 0$恒成立知

$(3-a)e^{-1}+e^2\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant e^3+3$.

从而,$3<a\leqslant e^3+3$.

(3)若$a<-1$,则

当$x<-1$或$x>-a$时,$f'(x)>0$;

当$-1<x<-a$时,$f'(x)<0$.

故$f(x)$在区间$(-\infty,-1]$、$[-a,+\infty)$上为增函数;在区间$[-1,-a]$上为减函数.

当$x\leqslant -1$时,

$g(x)=x^2+(a-1)x+1>(a-1)x>0$,

$f(x)+e^2>0$

成立.

当$x>-1$时,$f(x)$的最小值为$f(-a)$.

由$f(x)+e^2\geqslant 0$恒成立知

$f(-a)+e^2=(a+1)e^{-a}+e^2\geqslant 0$.

设$h(x)=(x+1)e^{-x}+e^2$. 则

$h'(x)=-xe^{-x}$,

当$x<-1$时,$h'(x)>0$.

故$h(x)$在区间$(-\infty,-1)$上为增函数.

又$h(-2)=0$,于是,$h(x)\geqslant 0$在区间$(-\infty,-1)$上的解集为$[-2,-1)$.

从而,$a<-1$时,

$f(-a)+e^2=(a+1)e^{-a}+e^2\geqslant 0$

的解集为$[-2,-1)$.

综合(1)~(3)得$-2\leqslant a\leqslant e^3+3$.

故a的取值范围是$[-2,e^3+3]$.

15. 对黑格与白格分别标记为-1与1.

对于任意的i、j $(1\leqslant i$、$j\leqslant 2\,020)$,设第i行各数之和为s_i,第j列各数之和为t_j,第i行与第j列交叉格中的数为a_{ij}. 则位于第i行或第j列上的全部数之和为$s_i+t_j-a_{ij}$.

由条件,知$s_i+t_j-a_{ij}$与a_{ij}异号.

则$a_{ij}(s_i+t_j-a_{ij})\leqslant -1$.

又$a_{ij}^2=1$,于是,

$$a_{ij}(s_i+t_j)\leqslant 0,\sum_{i=1}^{2\,020}\sum_{j=1}^{2\,020}a_{ij}(s_i+t_j)\leqslant 0.$$

注意到,

$$\sum_{i=1}^{2\,020}\sum_{j=1}^{2\,020}a_{ij}(s_i+t_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{2\,020}s_i\sum_{j=1}^{2\,020}a_{ij}+\sum_{j=1}^{2\,020}t_j\sum_{i=1}^{2\,020}a_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{2\,020}s_i^2+\sum_{j=1}^{2\,020}t_j^2\geqslant 0.$$

则$\sum_{i=1}^{2\,020}\sum_{j=1}^{2\,020}a_{ij}(s_i+t_j)=\sum_{i=1}^{2\,020}s_i^2+\sum_{j=1}^{2\,020}t_j^2=0$.

故对于任意的i、j,均有$s_i=0$,$t_j=0$.

从而,每行、每列中的两种颜色的格一样多.

(陈德燕 提供)

万方数据