

§ 2.2 第 3 课时 函数性质的综合问题

复习目标

1. 进一步理解函数的四大性质的内涵，能根据函数解析式、定义、图像发现函数的相关性质；
2. 理解函数的不同性质之间的相互关联，能根据相关定义推导函数的相关性质，并根据相关性质解决具体问题。

课前热身

1. 已知函数 $f(x)$ 满足以下两个条件：①任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$, $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ；②对定义域内任意 x 有 $f(x) + f(-x) = 0$ ，则符合条件的函数是()

A. $f(x) = 2x$ B. $f(x) = 1 - |x|$ C. $f(x) = -x^3$ D. $f(x) = \ln(x^2 + 3)$

2. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，其函数图象关于直线 $x = -1$ 对称，且 $f(x+4) = f(x-2)$ 。若当 $x \in [-4, -1]$

时， $f(x) = 6^{-x}$ ，则 $f(919) = ()$

A. $-\frac{1}{216}$ B. $\frac{1}{216}$ C. -216 D. 216

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数， $f(x+1)$ 是偶函数，当 $x \in (2, 4)$ 时， $f(x) = |x-3|$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(2020) = ()$ 。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

4. (多选)函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)$ 为奇函数， $f(x+1)$ 为偶函数，则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 的周期为 8； B. $f(x)$ 关于点 $(-1, 0)$ 对称； C. $f(x)$ 为偶函数； D. $f(x+7)$ 为奇函数。

5. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+2) = f(x)$ ，则 $f(2020) + f(2021) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4) = -f(x)$ ，且在区间 $[0, 2]$ 上单调递增。若方程 $f(x) = m (m > 0)$ 在区间 $[-8, 8]$ 上有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4 ，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

知识梳理

典例研究

题型一 函数的单调性与奇偶性

例 1. (1) 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geq 0$ 的 x 的取值范围是()

- A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$ B. $[-3,-1]\cup[0,1]$ C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$ D. $[-1,0]\cup[1,3]$

(2) 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是_____.

题型二 函数的奇偶性与周期性

例 2. (1) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$, 当 $0\leq x\leq 1$ 时, $f(x)=x^2$, 则 $f(2023)$ 等于()

- A. 2019^2 B. 1 C. 0 D. -1

(2) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 3 为周期的偶函数, 若 $f(1)<1$, $f(5)=2a-3$, 则实数 a 的取值范围是_____.

题型三 函数的奇偶性与对称性

例 3. (1) 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且满足 $f(4-x)=-f(x)$, 则 $f(x)$ 的周期为()

- A. -4 B. 2 C. 4 D. 6

(2) 函数 $y=f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=f(-x)$ 成立, 且函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称, $f(1)=4$, 则 $f(2020)+f(2021)+f(2022)$ 的值为_____.

题型四 函数的周期性与对称性

例 4. (多选) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 其函数图象关于直线 $x=-3$ 对称, 且 $f(x+3)=f(x-3)$, 若当 $x\in[0,3]$ 时, $f(x)=4^x+2x-11$, 则下列结论正确的是()

- A. $f(x)$ 为偶函数 B. $f(x)$ 在 $[-6, -3]$ 上单调递减 C. $f(x)$ 关于 $x=3$ 对称 D. $f(100)=9$

课堂小结

跟踪反馈

1. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 若 $f(\ln x) < f(2)$, 则 x 的取值范围是()
A. $(0, e^2)$ B. $(e^{-2}, +\infty)$ C. $(e^2, +\infty)$ D. (e^{-2}, e^2)
2. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x+5)=f(x)$, 当 $x \in \left[-\frac{5}{2}, 0\right]$ 时, $f(x)=2^x-1$, 则 $f(16)$ 的值为()
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$
3. 已知函数 $f(x)=2 \cdot 020^x + \log_{2 \cdot 020}(\sqrt{x^2+1}+x) - 2 \cdot 020^{-x} + 3$, 则关于 x 的不等式 $f(1-2x)+f(x)>6$ 的解集为()
A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(2, +\infty)$
4. (多选) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数, 则()
A. $f(x)$ 为奇函数 B. $f(x)$ 为周期函数 C. $f(x+3)$ 为奇函数 D. $f(x+4)$ 为偶函数
5. 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 满足 $f(x-4)=-f(x)$, $f(x-4)=f(-x)$, 且当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)=2^x + \log_2 x$, 则 $f(-80)$, $f(-25)$, $f(11)$ 的大小关系为_____.
6. 已知 $g(x)$ 为偶函数, $h(x)$ 为奇函数, 且满足 $g(x)-h(x)=2^x$, 若存在 $x \in [-1, 1]$, 使得不等式 $m \cdot g(x)+h(x) \leq 0$ 有解, 求实数 m 的最大值.

纠错补偿

1. 订正： 题号

2. 补偿训练：