

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期期末模拟测试 1

高一年级数学试卷

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中项符合题目要求,请将答案填涂到答题卡相应区域。

1. 设集合 $M=\{x|x>-1\}$, 集合 $N=\{x|-2<x<1\}$, 则 $M\cap N=(\quad)$

- A. $(-2,-1)$ B. $(-1,1)$ C. $(-1,+\infty)$ D. $(-2,+\infty)$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x>0, \\ x+3, & x\leq 0, \end{cases}$ 则 $f(f(-2))$ 的值为 $(\quad)$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

3. 已知 $x=\log_{2.1} 0.3$, $b=0.3^{2.1}$, $c=2.1^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系是 $(\quad)$

- A. $b>c>a$ B. $c>a>b$ C. $b>a>c$ D. $c>b>a$

4. 2020 年 11 月 24 日凌晨 4 时 30 分,我国在文昌航天发射场用长征五号遥五运载火箭把嫦娥五号探测器顺利地送入预定轨道,开启我国首次外太空采样返回之旅。据科学家们测算:火箭的最大速度至少达 11.2 千米/秒时,可将嫦娥五号探测器顺利送入外太空。若火箭的最大速度 v (单位:米/秒)、燃料的质量 M (单位:吨)和嫦娥五号探测器的质量 m (单位:吨)近似满足函数关系式 $v=5600\cdot\lg(1+\frac{M}{m})$, V =当燃料质量与嫦娥五号探测器质量的比值至少为 $(\quad)$ 顺利送入外太空。

- A. 9 B. 99 C. 999 D. 9999

5. 方程 $e^x+x-2=0$ (其中 $e=2.71828\dots$) 的近似解所在的区间是 $(\quad)$

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 2)$

6. 英国数学家泰勒(B. Taylor, 1685-1731)以发现泰勒公式和泰勒级数闻名于世。由泰勒公



式,我们能得到 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$ (其中 e 为自然对数的底

数, $0<\theta<1$, $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times 2\times 1$), 其拉格朗日余项是 $R_n=\frac{e^\theta}{(n+1)!}$. 可以看出,右边的项用得越多,

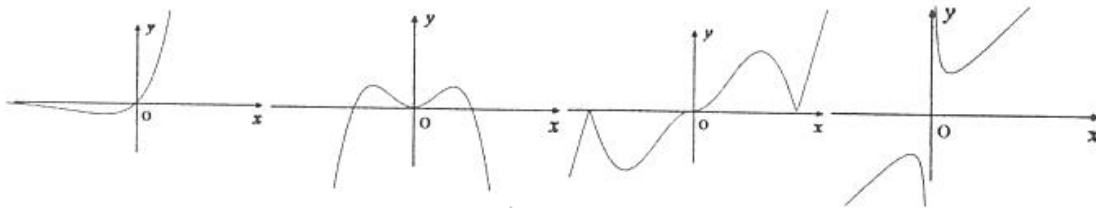
计算得到的 e 的近似值也就越精确。若 $\frac{3}{(n+1)!}$ 近似地表示 e 的泰勒公式的拉格朗日余项 R_n , R_n 不超过 $\frac{1}{1000}$

时,正整数 n 的最小值是 $(\quad)$

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

7. 现有四个函数:① $y=x|\sin x|$, ② $y=x^2\cos x$, ③ $y=x\cdot e^x$; ④ $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象(部分)如下,但顺序被打乱,则按照从左

到右将图象对应的函数序号安排正确的一组是 $(\quad)$



- A. ①②③④ B. ①③②④ C. ②①③④ D. ③②①④

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 4x-2, & x \leq 1, \\ \log_2(x+3), & x > 1, \end{cases}$ 则满足不等式 $f(x) + f(x - \frac{1}{4}) > 2$ 的 x 的取值范围是()

- A. $(\frac{-23+\sqrt{257}}{8}, +\infty]$ B. $(\frac{7}{8}, 1]$ C. $(1, \frac{5}{4}]$ D. $(\frac{7}{8}, +\infty)$

二、多选题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分。

9. 设函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^{|x|}$, 下列说法正确的是()

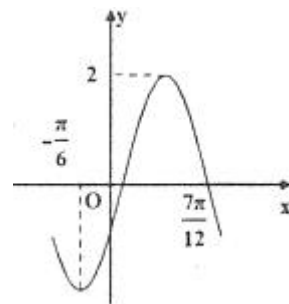
- A. 函数 $f(x)$ 是偶函数 B. 函数 $f(x)$ 是奇函数
C. 函数 $f(x)$ 有最大值 1 D. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减

10. 下列说法正确的是()

- A. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-1)=f(1)$, 则 $f(x)$ 是偶函数
B. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-1) \neq f(1)$, 则 $f(x)$ 不是偶函数
C. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-1) < f(1)$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数
D. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-1) < f(1)$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是减函数

11. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则()

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π
B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称
C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称
D. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 所得的函数图象关于 y 轴对称



12. 双曲函数是一类与常见的三角函数类似的函数。最基本的双曲函数是双曲正弦函数 $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 和双曲

余弦函数 $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 其中 e 是自然对数的底数。则下列结论正确的是()

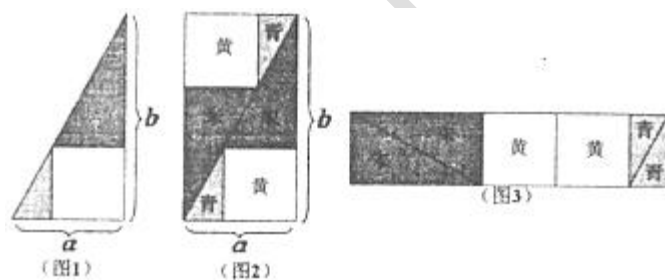
- A. $ch2x = ch^2x + sh^2x$ B. $sh2x = ch^2x - sh^2x$
C. $sh(x+y) = shxchy + chxshy$ D. $ch(x+y) = chxchy + shxshy$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。请将答案填写在答题卡相应的位置上。

13.命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ”的否定是_____。

14.已知幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的图象过点 $(3, \sqrt{3})$, 则该函数的解析式为 $f(x) =$ _____。

15.“勾股容方”问题出自我国汉代数学名著《九章算术》,该问题可以被描述为:“设一直角三角形(如图 1)的两直角边长分别为 a 和 b ,求与该直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长”,公元 263 年,数学家刘徽为《九章算术》作注,在注中他利用出入相补原理给出了上述问题如图 2 和图 3 所示的解答,则图 1 中与直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长为_____,当内接正方形的面积为 1 时,则图 3 中两个标有“朱”的三角形和两个标有“青”的三角形的面积总和的最小值为_____。



16.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,对任意的实数 x ,有 $f(1-x)=f(1+x)$,当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = e^x + x$, 则不等式 $f(2x-1) \geq f(x+1)$ 的解集为_____。

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

17.(本题满分 10 分) 计算: (1) $(\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}} - (-8)^0 + \sqrt[5]{(-1)^5} + (0.5)^{-1}$ (2) $(\lg 2)^2 + \lg 5 \times \lg 2 + \lg 5 + \ln 1$.

18.(本题满分 12 分) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 \leq 0\}$, $B = \{x | (x-m)(x-m-6) \leq 0\}$,其中 $m \in \mathbf{R}$.

(1)当 $m=2$ 时,求 $A \cup B$; (2)若“ $x \in A$ ”是“ $x \in \mathbb{C}_R B$ ”的充分条件,求 m 的取值范围

19.(本题满分 12 分) 已知 θ 为锐角,在以下三个条件中任选一个:

① $\frac{\cos(2\pi - \theta) \sin(3\pi + \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \tan(\pi - \theta)} = \frac{1}{2}$; ② $2\sin^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$; ③ $\frac{\cos(\theta - \pi)}{\sin(\pi + \theta)} \cdot \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{1}{4}$;

并解答以下问题: (1)若选_____(填序号),求 θ 的值;

(2)在(1)的条件下,求函数 $y = \tan(2x + \theta)$ 的定义域、周期和单调区间。

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分。

20.(本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2}$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1, b > 0$ 且 $b \neq 1$;

(1)若 $f(x)$ 为偶函数,试确定 a, b 满足的等量关系;

(2)已知 $n \in \mathbf{N}^*$, 试比较 $f(n)$ 和 $\frac{f(2n)}{2}$ 的大小关系,并证明你的结论.

21.(本题满分 12 分) 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时,列表并填入部分数据,如表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x			$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$
$A \sin(\omega x + \varphi) + B$		3		-1	

(1)请根据上表中的部分数据,求出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)若定义在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的函数 $g(x) = af(x) + b$ 的最大值为 7,最小值为 1,求实数 a, b 的值.

22.(本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 6, g(x) = 2^x$.

(1)求 $g(f(m))$ 的值;

(2)若方程 $g(f(x)) = 128$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有唯一的解,求实数 m 的取值范围;

(3)对任意 $m \in \mathbf{R}$,若关于 x 的不等式 $f(g(x)) + f(g(-x)) \geq t[g(x) + g(-x)]$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立,求实数 t 的取值范围.

2020~2021 学年度第一学期期末调研测试

高一数学参考答案

一、单项选择题:

1. B 2. C 3. D 4. B 5. A 6. B 7. D 8. D

二、多项选择题:

9. AC 10. BD 11. CD 12. ACD

三、填空题:

13. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$ 14. $x^{\frac{1}{2}}$ (或 $\sqrt{x}$)

15. $\frac{ab}{a+b}, 2$ 16. $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ (或 $\left\{x \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 2\right\}$)

四、解答题:

17. (本题满分 10 分)

解: (1) 原式 $= \frac{3}{2} - 1 - 1 + 2 = \frac{3}{2}$ -----5 分

(2) 原式 $= \lg 2 \times (\lg 2 + \lg 5) + \lg 5 + 0 = \lg 2 + \lg 5 = 1$ -----10 分

18. (本题满分 12 分)

解: $A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 \leq 0\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 6\}$

$B = \{x \mid m \leq x \leq m+6\}$ -----2 分

(1) 当 $m = 2$ 时, $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 8\}$ -----4 分

所以 $A \cup B = \{x \mid -1 \leq x \leq 8\}$ -----6 分

(2) 因为“ $x \in A$ ”是“ $x \in C_R B$ ”的充分条件, 所以 $A \subseteq C_R B$,

又 $C_R B = \{x \mid x < m, \text{或} x > m+6\}$, -----8 分

所以 $m > 6$ 或 $m+6 < -1$, 即 $m > 6$ 或 $m < -7$ -----11 分

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -7) \cup (6, +\infty)$. -----12 分

19. (本题满分 12 分)

解: (1) 若选①, 因为 $\frac{\cos(2\pi - \theta) \sin(3\pi + \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \tan(\pi - \theta)} = \frac{\cos \theta \cdot (-\sin \theta)}{\cos \theta \cdot (-\tan \theta)} = \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \cos \theta$,

所以 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 又 θ 为锐角, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$. -----6 分

若选②, 由 $2\sin^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$, 得 $2(1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta - 1 = 0$,

即 $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$, 即 $(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$,

解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 或 $\cos \theta = -1$;

因为 θ 为锐角, 所以 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. -----6 分

若选③, 因为 $\frac{\cos(\theta - \pi)}{\sin(\pi + \theta)} \cdot \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$

$$= \frac{-\cos \theta}{-\sin \theta} \cdot (-\cos \theta) \cdot (-\sin \theta) = \cos^2 \theta,$$

所以 $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$, 解得 $\cos \theta = \pm \frac{1}{2}$, 又 θ 为锐角, 所以 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. -----6 分

(2) 由 (1) 知, $\theta = \frac{\pi}{3}$, 则函数解析式为 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

由 $2x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 得 $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$.

所以函数的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\right\}$. -----8 分

函数的周期 $T = \frac{\pi}{2}$. -----9 分

由 $k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < k\pi + \frac{\pi}{2}$, 得 $\frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$.

所以函数的单调递增区间为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) (k \in \mathbf{Z})$,

函数无单调递减区间. -----12 分

20. (本题满分 12 分)

解: (1) 方法一: 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

所以 $f(-x) = f(x)$ 恒成立 -----2 分

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(-x) - f(x) &= \ln \frac{a^{-x} + b^{-x}}{2} - \ln \frac{a^x + b^x}{2} = \ln \frac{a^{-x} + b^{-x}}{a^x + b^x} \\ &= \ln \frac{a^x + b^x}{a^x b^x} = \ln \left(\frac{1}{ab} \right)^x = 0 \text{ 恒成立, } \text{-----5 分} \end{aligned}$$

即 $\left(\frac{1}{ab} \right)^x = 1$ 恒成立, 所以 $ab = 1$. -----6 分

方法二: 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $f(-1) = f(1)$,

$$\text{即 } \ln \frac{a^{-1} + b^{-1}}{2} = \ln \frac{a + b}{2}, \text{ 所以 } \frac{a^{-1} + b^{-1}}{2} = \frac{a + b}{2},$$

$$\text{由 } \frac{a^{-1} + b^{-1}}{2} = \frac{a + b}{2ab} = \frac{a + b}{2}, \text{ 由题知 } a + b > 0, \text{ 所以 } ab = 1, \text{ ----4 分}$$

$$\text{此时 } f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2} = \ln \frac{a^x + \left(\frac{1}{a} \right)^x}{2} = \ln \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于坐标原点对称,

$$\text{又 } f(-x) = \ln \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 是偶函数.}$$

故当 $ab = 1$ 时, 满足题意.

综上: $ab = 1$. -----6 分

$$\begin{aligned} (2) \quad f(n) - \frac{f(2n)}{2} &= \ln \frac{a^n + b^n}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{a^{2n} + b^{2n}}{2} \\ &= \ln \frac{a^n + b^n}{2} - \ln \sqrt{\frac{a^{2n} + b^{2n}}{2}} \text{ -----8 分} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \frac{a^n + b^n}{2} > 0, \sqrt{\frac{a^{2n} + b^{2n}}{2}} > 0,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \left(\frac{a^n + b^n}{2} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^{2n} + b^{2n}}{2}} \right)^2 &= \frac{a^{2n} + 2a^n b^n + b^{2n} - 2a^{2n} - 2b^{2n}}{4} \\ &= -\frac{(a^n - b^n)^2}{4} \leq 0. \text{ -----10 分} \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{a^n + b^n}{2} \leq \sqrt{\frac{a^{2n} + b^{2n}}{2}}, \text{ 所以 } \ln \frac{a^n + b^n}{2} \leq \ln \sqrt{\frac{a^{2n} + b^{2n}}{2}}.$$

即 $f(n) \leq \frac{f(2n)}{2}$. -----12 分

(其他解法酌情给分)

21. (本题满分 12 分)

解: (1) 由题, 函数 $f(x)$ 的周期 $T = 2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) = \pi$,

所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, -----2 分

由 $\begin{cases} A+B=3 \\ -A+B=-1 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$, 故 $f(x) = 2\sin(2x+\varphi)+1$, -----3 分

由表可知, $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$. -----6 分

(2) 由 (1) 可知 $g(x) = 2a\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + a + b$, -----7 分

由 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 得 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$; -----8 分

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 的最大值是 $3a + b = 7$, 最小值是 $b = 1$,

解得 $a = 2$, $b = 1$; -----10 分

当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 的最大值是 $b = 7$, 最小值是 $3a + b = 1$,

解得 $a = -2$, $b = 7$;

综上, $a = 2$, $b = 1$; 或 $a = -2$, $b = 7$. -----12 分

22. (本题满分 12 分)

解: (1) $\because f(m) = m^2 - 2m^2 + m^2 + 6 = 6$, $\therefore g(f(m)) = g(6) = 2^6 = 64$. -----2 分

(2) 由 $g(f(x)) = 128$, 得 $2^{x^2 - 2mx + m^2 + 6} = 2^7$, 即 $x^2 - 2mx + m^2 + 6 = 7$,

即 $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$, 因式分解得 $(x - m - 1)(x - m + 1) = 0$,

解得 $x = m + 1$, 或 $x = m - 1$. -----4 分

$\because$ 方程 $g(f(x)) = 128$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有唯一的解,

注意到 $m + 1 > m - 1$,

$$\therefore \begin{cases} -1 \leq m-1 \leq 2, \\ m+1 > 2, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m-1 < -1, \\ -1 \leq m+1 \leq 2, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < m \leq 3, \text{ 或 } -2 \leq m < 0.$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $(1, 3] \cup [-2, 0)$. -----6 分

$$(3) \text{ 由 } f(g(x)) + f(g(-x)) \geq t[g(x) + g(-x)],$$

$$\text{得 } (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x + m^2 + 6 + (2^{-x})^2 - 2m \cdot 2^{-x} + m^2 + 6 \geq t(2^x + 2^{-x}),$$

$$\text{整理得 } 2m^2 - 2(2^x + 2^{-x}) \cdot m + (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 12 - t(2^x + 2^{-x}) \geq 0 \quad ①;$$

$\because$ ①式对任意 $m \in \mathbf{R}$ 恒成立,

$$\therefore \Delta = 4(2^x + 2^{-x})^2 - 8[(2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 12 - t(2^x + 2^{-x})] \leq 0, \text{ -----8 分}$$

$$\text{整理得 } 2t(2^x + 2^{-x}) \leq (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 22, \text{ 即 } 2t \leq \frac{(2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 22}{2^x + 2^{-x}} \quad ②;$$

$$\text{记 } \varphi(x) = \frac{(2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 22}{2^x + 2^{-x}}, \because \text{②式在 } x \in \mathbf{R} \text{ 上恒成立, } \therefore 2t \leq \varphi(x)_{\min}.$$

$$\text{令 } u = 2^x + 2^{-x}, \because 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \times \frac{1}{2^x}} = 2,$$

当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立, $\therefore u \geq 2$. -----10 分

$$\text{则 } \varphi(x) = h(u) = \frac{u^2 + 20}{u} = u + \frac{20}{u} \geq 4\sqrt{5},$$

当且仅当 $u = 2\sqrt{5} \in [2, +\infty)$ 时, 等号成立, $\therefore \varphi(x)_{\min} = 4\sqrt{5}$.

$$\therefore 2t \leq 4\sqrt{5}, \text{ 即 } t \leq 2\sqrt{5}. \therefore \text{实数 } t \text{ 的取值范围是 } (-\infty, 2\sqrt{5}]. \text{ -----12 分}$$