

第十四届中国东南地区数学奥林匹克

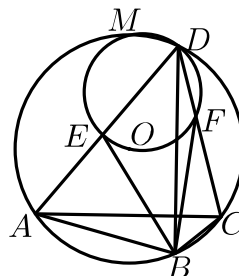
高二年级 第二天

题 1 设 a, b, c 为实数, $a \neq 0$. 若一元二次方程 $2ax^2 + bx + c = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有实根, 证明:

$$\min\{c, a + c + 1\} \leq \max\{|b - a + 1|, |b + a - 1|\}$$

并确定上述不等式等号成立时, a, b, c 满足的充要条件.

题 2 如图, 在圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相互垂直, 弧 $\widehat{ADC}$ 的中点为 M , 过 M, O, D 三点的圆与 DA, DC 分别交于 E, F . 证明: $BE = BF$.



题 3 求最大的正整数 n , 使得存在 n 个互不相同的整数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 满足

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 2017$$

题 4 给定整数 $m \geq 3, n \geq 3$. 设集合

$$S = \{(a, b) | a \in \{1, 2, \dots, m\}, b \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

A 为 S 的子集. 若不存在正整数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, 使得 $x_1 < x_2 < x_3, y_1 < y_2 < y_3$, 且

$$(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_2) \in A$$

求集合 A 的元素的个数的最大值.