

江苏省仪征中学高二数学周练 10

一、选择题

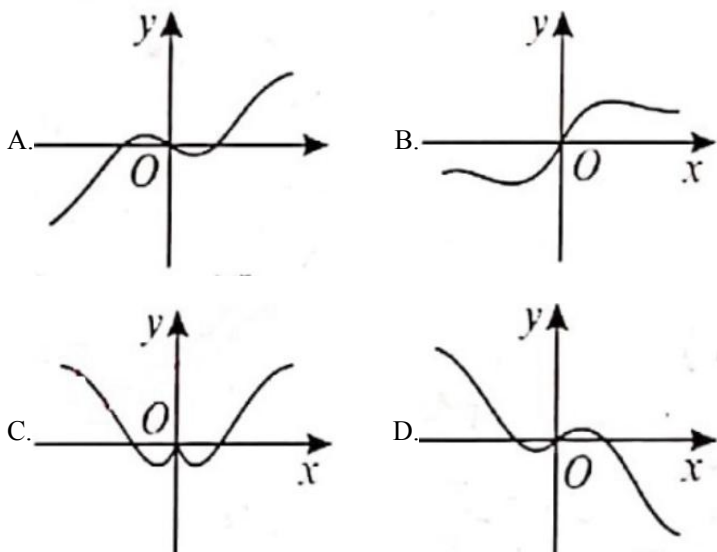
1. 函数 $f(x) = x + \frac{3}{x} + 2\ln x$ 的单调递减区间 ()

- A. $(0, 3)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 3)$ D. $(3, +\infty)$

2. 用数字 0, 1, 2, 3 可以组成无重复数字的四位偶数有 ()

- A. 12 个 B. 10 个 C. 20 个 D. 16 个

3. 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$ 的大致图象可能是 ()



4. 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right)^n$ 的展开式中, 只有第 5 项的二项式系数最大, 则展开式中 x^5 的系数为 ()

- A. -7 B. $-\frac{35}{8}$ C. $\frac{35}{8}$ D. 7

5. 已知函数 $f(x) = x^2$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线与函数 $g(x) = \frac{e^x}{a}$ 的图象相切, 则实数 $a =$ ()

- A. $\sqrt{e}$ B. $\frac{e\sqrt{e}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{e}}{2}$ D. $e\sqrt{e}$

6. 已知函数 $f(x) = e^{2x-1}$, $g(x) = \frac{1}{2} + \ln x$, 若 $f(m) = g(n)$, 则 $m - n$ 的最大值是 ()

- A. $-\frac{\ln 2 + 1}{2}$ B. $\frac{1}{2} - \sqrt{e}$ C. $\frac{\ln(2e)}{2}$ D. $-\sqrt{e} - \frac{1}{2}$

7. (多选) 设 $(2x+1)^6 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_6(x+1)^6$, 下列结论正确的是 ()

A. $a_0 - a_1 + a_2 \cdots - a_5 + a_6 = 3^6$

B. $a_2 + a_3 = 100$

C. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6$ 中最大的是 a_2

D. 当 $x = 999$ 时, $(2x+1)^6$ 除以 2000 的余数是 1

8. (多选) 近年来中国进入一个鲜花消费的增长期, 某农户利用精准扶贫政策, 贷款承包了一个新型温室鲜花大棚, 种植销售红玫瑰和白玫瑰. 若这个大棚的红玫瑰和白玫瑰的日销量分别服从正态分布 $N(\mu, 30^2)$ 和 $N(280, 40^2)$, 则下列选项正确的是 ()

附: 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6826$.

A. 若红玫瑰日销售量范围在 $(\mu - 30, 280)$ 的概率是 0.6826, 则红玫瑰日销售量的平均数约为 250

B. 红玫瑰日销售量比白玫瑰日销售量更集中

C. 白玫瑰日销售量比红玫瑰日销售量更集中

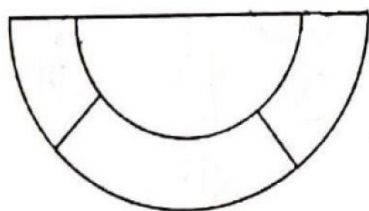
D. 白玫瑰日销售量范围在 $(280, 320)$ 的概率约为 0.3413

二、填空题:

9. 二项式 $\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, 常数项为_____.

10. 若 $C_{x+3}^x - C_{x+2}^3 = 28$, 则 x 的值为_____.

11. 如图, 用五种不同的颜色涂在图中不同的区域内, 要求每个区域只能涂一种颜色, 且相邻(有公共边)区域涂的颜色不同, 则不同的涂色方案一共有_____种. 用数字作答



12. 数 $f(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2\ln x$, 若 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调减函数, 则实数 a 的最大值为_____, 若 $a > 0$,

在 $[1, e]$ 上至少存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) - \frac{2e}{x_0} \geq 0$ 成立, 则实数 a 的最小值为_____.

三、解答题：

13. 已知从 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式的所有项中任取两项的组合数是 21.

(1) 求展开式中所有二项式系数之和

(2) 若 $\left(a + \frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中的常数项为 $\frac{7}{2}$, 求 a 的值.

14. 已知函数 $f(x) = x - \frac{a}{x} - (a+1)\ln x (a \in R)$.

(1) 当 $0 < a \leq 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 是否存在实数 a , 使 $f(x) \leq x$ 恒成立, 若存在, 求出实数 a 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

15. 高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型, 在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块玻璃, 让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下, 小球在下落的过程中与层层小木块碰撞, 且等可能向左或向右滚下, 最后掉入高尔顿板下方的某一球槽内. 如图 1 所示的高尔顿板有 7 层小木块, 小球从通道口落下, 第一次与第 2 层中间的小木块碰撞, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右滚下, 依次经过 6 次与小木块碰撞, 最后掉入编号为 1, 2, ..., 7 的球槽内. 例如小球要掉入 3 号球槽, 则在 6 次碰撞中有 2 次向右 4 次向左滚下.

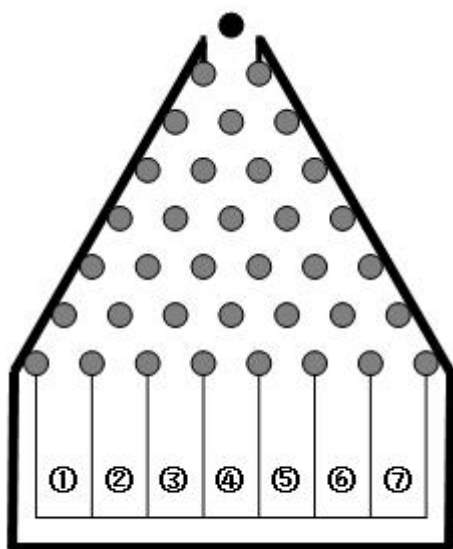


图1

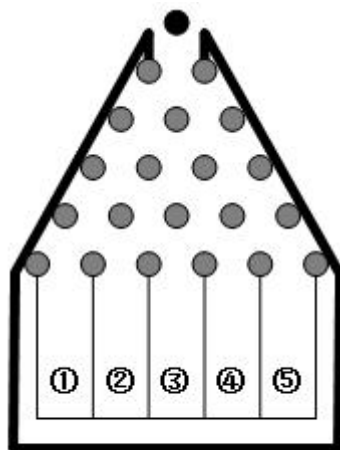


图2

(1) 如图 1, 进行一次高尔顿板试验, 求小球落入 5 号球槽的概率;

(2) 小红、小明同学在研究了高尔顿板后, 利用高尔顿板来到社团文化节上进行盈利性“抽奖”活动. 小红使用图 1 所示的高尔顿板, 付费 6 元可以玩一次游戏, 小球掉入 m 号球槽得到的奖金为 ξ 元, 其中 $\xi = |16 - 4m|$.

小明改进了高尔顿板(如图 2), 首先将小木块减少成 5 层, 然后使小球在下落的过程中与小木块碰撞时, 有 $\frac{1}{3}$ 的概率向左, $\frac{2}{3}$ 的概率向右滚下, 最后掉入编号为 1, 2, …, 5 的球槽内, 改进高尔顿板后只需付费 4 元就可以玩一次游戏, 小球掉入 n 号球槽得到的奖金为 η 元, 其中 $\eta = (n-4)^2$. 两位同学的高尔顿板游戏火爆进行, 很多同学参加了游戏, 你觉得小红和小明同学谁的盈利多? 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{15}{64}$; (2) 小明的盈利多, 理由见解析.

16. 在杨辉三角形中, 从第 2 行开始, 除 1 以外, 其它每一个数值是它上面的两个数值之和, 该三角形数阵开头几行如图所示.

第0行				1			
第1行			1	1			
第2行		1	2	1			
第3行		1	3	3	1		
第4行	1	4	6	4	1		
第5行	1	5	10	10	5	1	
第6行	1	6	15	20	15	6	1

(1) 在杨辉三角形中是否存在某一行, 使该行中三个相邻的数之比是 3:4:5? 若存在, 试求出是第几行; 若不存在, 请说明理由;

(2) 已知 n, r 为正整数, 且 $n \geq r+3$, 求证: 任何四个相邻的组合数 $C_n^r, C_n^{r+1}, C_n^{r+2}, C_n^{r+3}$, 不能构成等差数列.

高二周练 10 参考答案

一、选择题 1.B; 2.B; 3.A; 4.D; 5.B; 6.A; 7.AD; 8.ABD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

9. $40\sqrt{2}$ 10. 6 11. 180 12. $\frac{2e}{e^2+1}; \frac{4e}{e^2-1}$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 【解析】(1) $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式共有 $n+1$ 项, 由题意可得 $C_{n+1}^2 = 21$, 解得 $n=6$,

所以展开式中所有二项式系数之和为 $2^6 = 64$.

(2) 由 $(a + \frac{1}{x^2})(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n = a(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n + \frac{1}{x^2}(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$,

则 $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (\sqrt[3]{x})^{6-k} (-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^k = (-\frac{1}{2})^k C_6^k \cdot x^{\frac{6-2k}{3}}$,

令 $k = \frac{6-2k}{3} = 0$ 或 2 , 截得 $k=3$ 或 $k=0$,

所以展开式中的常数项为 $a \cdot (-\frac{1}{2})^3 C_6^3 + C_6^0 = \frac{7}{2}$,

解 $a = -1$.

14. 【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 1 + \frac{a}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{(x-a)(x-1)}{x^2},$$

当 $0 < a < 1$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < a$, 或 $x > 1$,

由 $f'(x) < 0$, 得 $a < x < 1$,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a, 1)$,

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$ 恒成立,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(2) $f(x) \leq x$ 恒成立等价于 $a + (a+1)x \ln x \geq 0$ 恒成立, 令 $g(x) = a + (a+1)x \ln x$,

当 $a+1=0$ 时, 即当 $a=-1$ 时, $g(x) = -1$,

故 $g(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内不能恒成立,

当 $a+1 < 0$ 时, 即当 $a < -1$ 时, 则 $g(1) = a < -1$, 故 $g(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内不能恒成立,

当 $a+1 > 0$ 时, 即当 $a > -1$ 时,

$g'(x) = (a+1)(1 + \ln x)$, 由 $g'(x) = 0$ 解得 $x = \frac{1}{e}$,

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{e}) = a - \frac{a+1}{e} \geq 0$, 解得 $a \geq \frac{1}{e-1}$.

综上, 当 $a \geq \frac{1}{e-1}$ 时, $g(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内恒成立,

即 $f(x) \leq x$ 恒成立,

所以实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{e-1}, +\infty)$.

15. 【解析】(1) 存在.

杨辉三角形的第 n 行由二项式系数 C_n^k , $k=0, 1, 2, \dots, n$ 组成.

如果第 n 行中有三个相邻的数之比为 $3:4:5$,

$$\text{则 } \frac{C_n^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n-k+1} = \frac{3}{4}, \quad \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k} = \frac{4}{5},$$

即 $3n-7k=-3, 4n-9k=5$, 解得 $k=27, n=62$.

即第 62 行有三个相邻的数 C_{62}^{26} , C_{62}^{27} , C_{62}^{28} 的比为 $3:4:5$.

(2) 证明: 假设有 n , $r (n \geq r+3)$, 使得 $C_n^r, C_n^{r+1}, C_n^{r+2}, C_n^{r+3}$ 成等差数列,

$$\text{则 } 2C_n^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+2}, \quad 2C_n^{r+2} = C_n^{r+1} + C_n^{r+3},$$

$$\text{即 } \frac{2 \cdot n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!},$$

$$\frac{2 \cdot n!}{(r+2)!(n-r-2)!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} + \frac{n!}{(r+3)!(n-r-3)!}.$$

$$\text{所以 } \frac{2}{(r+1)(n-r-1)} = \frac{1}{(n-r-1)(n-r)} + \frac{1}{(r+1)(r+2)},$$

$$\frac{2}{(r+2)(n-r-2)} = \frac{1}{(n-r-2)(n-r-1)} + \frac{1}{(r+2)(r+3)},$$

$$\text{整理得: } n^2 - (4r+5)n + 4r(r+2) + 2 = 0, \quad n^2 - (4r+9)n + 4(r+1)(r+3) + 2 = 0.$$

两式相减可得 $n = 2r+3$,

所以 $C_{2r+3}^r, C_{2r+3}^{r+1}, C_{2r+3}^{r+2}, C_{2r+3}^{r+3}$ 成等差数列,

而由二项式系数的性质可知 $C_{2r+3}^r = C_{2r+3}^{r+3} < C_{2r+3}^{r+1} = C_{2r+3}^{r+2}$,

这与等差数列性质矛盾, 故假设不成立, 从而要证明的结论成立.

16. 【答案】(1) $\frac{15}{64}$; (2) 小明的盈利多, 理由见解析.