

江苏省无锡市江阴市四校联考高二（上）期中数学试卷

一.填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分．请将答案填写在答题卡指定位置处．

- （5 分）命题“ $\forall x \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ ”的否定是_____．
- （5 分）过点 $P(-1, 3)$ 且垂直于直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的直线方程为_____．
- （5 分） $a = -\frac{3}{2}$ 是直线 $l_1: x + 2ay - 1 = 0$ 和直线 $l_2: (a+1)x - ay = 0$ 平行的_____条件．
(从“充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”中，选出适当的一种填空)
- （5 分）若圆 C 的半径为 1，点 C 与点 $(2, 0)$ 关于点 $(1, 0)$ 对称，则圆 C 的标准方程为_____．
- （5 分）已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ， E, F 分别是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 和 ADD_1A_1 的中心，则 EF 和 CD 所成的角的大小是_____．
- （5 分）直线 $x \sin \alpha + y + 2 = 0$ 的倾斜角的取值范围是_____．
- （5 分）设棱长为 a 的正方体的体积和表面积分别为 V_1, S_1 ，底面半径高均为 r 的圆锥的体积和侧面积分别为 V_2, S_2 ，若 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{\pi}$ ，则 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值为_____．
- （5 分）直线 $ax + y + 1 = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 - 2ax + a = 0$ 截得的弦长为 2，则实数 a 的值是_____．
- （5 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(1, \frac{3}{2})$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，则椭圆 C 的方程为_____．
- （5 分）已知 α, β 是两个不同的平面， l, m 是两条不同直线， $l \perp \alpha, m \subset \beta$ ．给出下列命题：
① $\alpha \parallel \beta \Rightarrow l \perp m$ ； ② $\alpha \perp \beta \Rightarrow l \parallel m$ ； ③ $m \parallel \alpha \Rightarrow l \perp \beta$ ； ④ $l \perp \beta \Rightarrow m \parallel \alpha$ ．
其中正确的命题是_____．（填写所有正确命题的序号）．
- （5 分）已知实数 x, y 满足方程 $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 1}$ ，则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是_____．

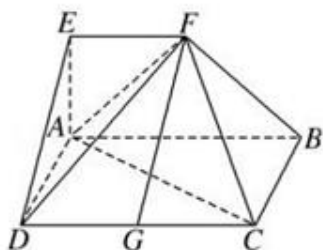
12. (5分) 已知圆 $C_1: (x-a)^2 + (y+2)^2 = 4$ 与圆 $C_2: (x+b)^2 + (y+2)^2 = 1$ 相外切, 则 ab 的最大值为_____.
13. (5分) 若圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$, 关于直线 $2ax + by + 6 = 0$ 对称, 则由点 (a, b) 向圆所作的切线长的最小值为_____.
14. (5分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与不过坐标原点 O 的直线 $l: y = kx + m$ 相交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M , 若 AB, OM 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$, 则椭圆 C 的离心率为_____.

二.解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分, 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (14分) (1) 求过点 $A(1, 3)$, 斜率是直线 $y = -4x$ 的斜率的 $\frac{1}{3}$ 的直线方程;
(2) 求经过点 $A(-5, 2)$, 且在 x 轴上的截距等于在 y 轴上截距的 2 倍的直线方程.

16. (14分) 如图, 过底面是矩形的四棱锥 $FABCD$ 的顶点 F 作 $EF \parallel AB$, 使 $AB = 2EF$, 且平面 $ABFE \perp$ 平面 $ABCD$, 若点 G 在 CD 上且满足 $DG = GC$. 求证:

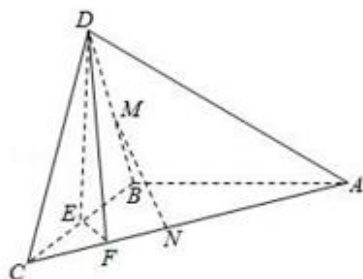
- (1) $FG \parallel$ 平面 AED ;
(2) 平面 $DAF \perp$ 平面 BAF .



17. (14 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 设命题 p : 椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{8-m} = 1$ 的焦点在 x 轴上; 命题 q : 直线 $l: x - y + m = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 9$ 有公共点. 若命题 $p \wedge q$ 为假命题, 且命题 $p \vee q$ 为真命题, 求实数 m 的取值范围.

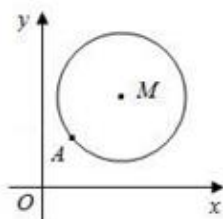
18. (16 分) 如图, 在三棱锥 $D - ABC$ 中, 已知 $\triangle BCD$ 是正三角形, $AB \perp$ 平面 BCD , $AB = BC = a$, E 为 BC 点, F 棱 AC 上, 且 $AF = 3FC$.

- (1) 求三棱锥 $D - ABC$ 的体积;
- (2) 求证: $AC \perp$ 平面 DEF ;
- (3) 若 M 为 DB 中点, N 在棱 AC 上, 且 $CN = \frac{3}{8}CA$, 求证: $MN \parallel$ 平面 DEF .



19. (16 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知以 M 为圆心的圆 $M: x^2 + y^2 - 12x - 14y + 60 = 0$ 及其上一点 $A(2, 4)$.

- (1) 设圆 N 与 x 轴相切, 与圆 M 外切, 且圆心 N 在直线 $x=6$ 上, 求圆 N 的标准方程;
- (2) 设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B, C 两点, 且 $|BC|=|OA|$, 求直线 l 的方程;
- (3) 设点 $T(t, 0)$ 满足: 存在圆 M 上的两点 P 和 Q , 使得 $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TQ}$, 求实数 t 的取值范围.



20. (16 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 左顶点为 $A(-4, 0)$, 过点 A 作斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 交椭圆 C 于点 D , 交 y 轴于点 E .

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 已知 P 为 AD 的中点, 是否存在定点 Q , 对于任意的 k ($k \neq 0$) 都有 $OP \perp EQ$, 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在说明理由;
- (3) 若过 O 点作直线 l 的平行线交椭圆 C 于点 M , 求 $\frac{AD+AE}{OM}$ 的最小值.

