# 小专题：圆锥曲线中的定点、定值问题

思维导读：本讲是圆锥曲线的综合问题，难度较大。

了解碰到定点定值问题时一般的处理方法．虽然本质上还是直线与圆锥曲线、韦达定理的应用，但是在处理的技巧上需要细细琢磨．选择合适的参数，并利用参数得到有关的曲线方程或函数关系式是解决问题的关键,尽量让计算量在可控的范围内． 常用的处理方法有两种:

①从特殊入手，先求出定点或定值等，再证明这个点或值与参数无关;

②直接推理，计算，并在计算过程中消去参数，从而得到定点或定值．

考点 1：圆锥曲线中的定值问题

在几何问题中，有些几何量与参数无关，这就构成定值问题．求解这类问题的基本策略是“大处着眼、小处着手”，从整体上把握问题给出的综合信息和处理问题的方法，并恰当地运用待定系数法、相关点法、定义法等基本数学方法．若题设中未告知定值，可考虑用特殊化方法探求定值的可能值，再证明之．若已告知，可设参数（有时甚至要设两个参数），运算推理到最后，参数必须消去．

考点 2：直线过定点的问题

如果满足一定条件的曲线系恒过某一点，就是定点问题．直线过定点问题的求解方法一般是先求出直线的方程（含参数），再由直线恒过定点的证明方法来求解．

**例题讲解**

**例 1**、已知 $B_2$，$B_1$ 分别是中心在原点，焦点在 $x$ 轴上的椭圆 $C$ 的上、下顶点，$F$ 是 $C$ 的右焦点，$FB_1=2$，$F$ 到直线 $x=-\dfrac{a^2}{c}$ 的距离是 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

(1)求椭圆 $C$ 的方程;

(2)点 $P$ 是椭圆 $C$ 上与 $B_1$，$B_2$ 不重合的动点，直线 $B_1P$，$B_2P$ 与 $x$ 轴分别交于点 $M$，$N$.

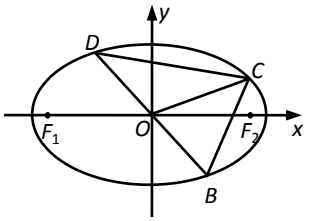
求证：$\vec{OM}\cdot\vec{ON}$ 是定值．

**例 2**．在平面直角坐标系 $xOy$ 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3},\ 0)$，$F_2(\sqrt{3},\ 0)$，且经过点 $(\sqrt{3},\ \frac{1}{2})$.

（1）求椭圆的方程及离心率；

（2）设点 $B$，$C$，$D$ 是椭圆上不同于椭圆顶点的三点，点 $B$ 与点 $D$ 关于原点 $O$ 对称．设直线 $CD$，$CB$，$OB$，$OC$ 的斜率分别为 $k_1$，$k_2$，$k_3$，$k_4$，且 $k_1k_2=k_3k_4$.

① $k_1k_2$ 的值；②求 $OB^2+OC^2$ 的值.

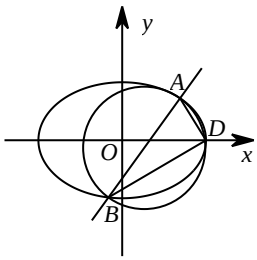


（第 2 题）

例 3、已知椭圆 $C$ 的中心在坐标原点，焦点在 $x$ 轴上，椭圆 $C$ 上的点到焦点距离的最大值为 $3$，最小值为 1.

⑴求椭圆 $C$ 的标准方程；

⑵若直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 $C$ 相交于 $A$，$B$ 两点（$A$，$B$ 不是左右顶点），且以 $AB$ 为直径的圆过椭圆 $C$ 的右顶点，求证：直线 $l$ 过定点，并求出该定点的坐标.

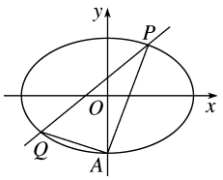


**巩固练习：**

1、如图，椭圆 $E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点 $A(0，-1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求椭圆 $E$ 的方程；

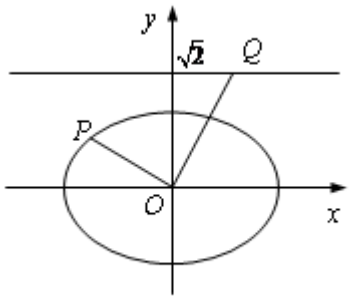
(2)经过点(1,1)，且斜率为 $k$ 的直线与椭圆 $E$ 交于不同的两点 $P$，$Q$(均异于点 $A$)，证明：直线 $AP$ 与 $AQ$ 的斜率之和为 2.




2、 如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦点到相应准线的距离为 1.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）若 $P$ 为椭圆上的一点，过点 $O$ 作 $OP$ 的垂线交直线 $y=\sqrt{2}$ 于点 $Q$，求 $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$ 的值.

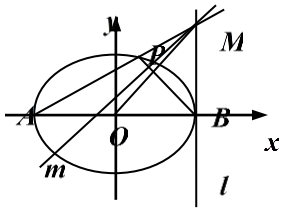



（第 17 题）

3、 如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 2，且过点 $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$.（1）求椭圆 $E$ 的方程；（2）若点 $A$ ， $B$ 分别是椭圆 $E$ 的左、右顶点，直线 $l$ 经过点 $B$ 且垂直于 $x$ 轴，点 $P$ 是椭圆上异于 $A$ ， $B$ 的任意一点，直线 $AP$ 交 $l$ 于点 $M$.

（ⅰ）设直线 $OM$ 的斜率为 $k_1$，直线 $BP$ 的斜率为 $k_2$ ，求证： $k_1k_2$ 为定值；

（ⅱ）设过点 $M$ 垂直于 $PB$ 的直线为 $m$ ，求证：直线 $m$ 过定点，并求出定点的坐标.



# 答案

1、解　(1)设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由已知得，$FB_1=a=2$，$c+\frac{a^2}{c}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$，所以 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，$b=1$.所以所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.　　(2)设 $P(x_0, y_0)(x_0\neq 0)$，直线 $B_1P$：$\frac{y+1}{y_0+1}=\frac{x}{x_0}$.令 $y=0$ 得 $x=\frac{x_0}{y_0+1}$, 即 $M\left(\frac{x_0}{y_0+1}, 0\right)$.直线 $B_2P$：$\frac{y-1}{y_0-1}=\frac{x}{x_0}$, 令 $y=0$ 得 $x=-\frac{x_0}{y_0-1}$, 即 $N\left(-\frac{x_0}{y_0-1}, 0\right)$所以$\vec{OM}\cdot\vec{ON}=-\frac{x_0^2}{y_0^2-1}$.因为$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $1-y_0^2=\frac{x_0^2}{4}$，所以$\vec{OM}\cdot\vec{ON}=-\frac{x_0^2}{y_0^2-1}=4$.即$\vec{OM}\cdot\vec{ON}$为定值

2、**解**：（1）**方法一**依题意，$c=\sqrt{3}$，$a^2=b^2+3$，由 $\frac{3}{b^2+3}+\frac{\frac{1}{4}}{b^2}=1$，

解得 $b^2=1(b^2=-\frac{3}{4}$，不合，舍去)，从而 $a^2=4$．故所求椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．　离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**方法 2**：由椭圆的定义知，$2a=\sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(0-\frac{1}{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(0-\frac{1}{2})^2}=4$，即 $a=2$.

下略.

（2）①设 $B(x_1, y_1)$，$C(x_2, y_2)$，则 $D(-x_1, -y_1)$，于是 $k_1k_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=\frac{(1-\frac{x_2^2}{4})-(1-\frac{x_1^2}{4})}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{1}{4}$.

②**方法一**由①知，$k_3k_4=k_1k_2=-\frac{1}{4}$，故 $x_1x_2=-4y_1y_2$.

所以，$(x_1x_2)^2=(-4y_1y_2)^2$，即$(x_1x_2)^2=16(1-\frac{x_1^2}{4})(1-\frac{x_2^2}{4})=16-4(x_1^2+x_2^2)+x_1^2x_2^2$，所以，$x_1^2+x_2^2=4$.

又 $2=(\frac{x_1^2}{4}+y_1^2)+(\frac{x_2^2}{4}+y_2^2)=\frac{x_1^2+x_2^2}{4}+y_1^2+y_2^2$，故 $y_1^2+y_2^2=1$．所以，$OB^2+OC^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=5$.

3、解：如图，由题意设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由题设知，得 $\begin{cases}a+c=3,\\a-c=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=2, \\ c=1, \end{cases}$ 则 $b^2=3$.

所以椭圆 $C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

⑵ 方法 1:

设 $A(x_1, y_1)$， $B(x_2, y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 $y$，得

$(3+4k^2)x^2+8mkx+4(m^2-3)=0$，

$\Delta=64m^2k^2-16(3+4k^2)(m^2-3)>0$，即 $3+4k^2-m^2>0$. 由根与系数的关系，得

$x_1+x_2=-\frac{8mk}{3+4k^2}$， ①

$x_1\cdot x_2=\frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}$. ②

所以 $y_1\cdot y_2=(kx_1+m)\cdot(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\frac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}$. ③

以 $AB$ 为直径的圆过椭圆的右顶点 $D(2, 0)$，所以 $DA\perp DB$，即 $k_{AD}\cdot k_{BD}=-1$，

所以 $\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=-1$，化简得 $y_1y_2+x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=0$，

将①②③代入上式，得 $\frac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}+\frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}+\frac{16mk}{3+4k^2}+4=0$，

整理得 $7m^2+16mk+4k^2=0$，解得 $m_1=-2k$，$m_2=-\frac{2k}{7}$，且满足 $3+4k^2-m^2>0$.

当 $m=-2k$ 时，直线 $l: y=k(x-2)$，过定点 $(2, 0)$.

∵ $(2, 0)$ 是椭圆的右顶点，且 $l$ 不过椭圆的右顶点，∴定点 $(2, 0)$ 舍

当 $m=-\frac{2k}{7}$ 时，直线 $l: y=k\left(x-\frac{2}{7}\right)$，过定点 $\left(\frac{2}{7}, 0\right)$.

综上可知，直线 $l$ 过定点，定点坐标为 $\left(\frac{2}{7}, 0\right)$

方法 2:

设 $A(x_1, y_1)$， $B(x_2, y_2)$，因为椭圆的右顶点为 $D(2, 0)$，

则可设直线 $AD$ 方程为 $y=k_1(x-2)$.

将 $y=k_1(x-2)$ 代入椭圆方程，并整理得 $(3+4k_1^2)x^2-16k_1^2x+16k_1^2-12=0$，④

显然 2 与 $x_1$ 是方程④的两个根，

所以 $x_1+2=\frac{16k_1^2}{3+4k_1^2}$，即 $x_1=\frac{8k_1^2-6}{3+4k_1^2}$，所以 $y_1=k_1(x_1-2)=\frac{-12k_1}{3+4k_1^2}$，

因为 $AD\perp BD$，且 $BD$ 也过右顶点 $D(2, 0)$

所以，用 $-\frac{1}{k_1}$ 替换上式中的 $k_1$，即得 $x_2=\frac{8-6k_1^2}{4+3k_1^2}$， $y_2=\frac{12k_1}{4+3k_1^2}$.

设直线 $AB$ 与 $x$ 轴交于点 $M(a, 0)$，并设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，即

$\left(a-\frac{8k_1^2-6}{3+4k_1^2}, \frac{12k_1}{3+4k_1^2}\right)=\lambda\left(\frac{8-6k_1^2}{4+3k_1^2}-a, \frac{12k_1}{4+3k_1^2}\right)$，

所以 $\begin{cases}\dfrac{12k_1}{3+4k_1^2}=\lambda\dfrac{12k_1}{4+3k_1^2},\\ a-\dfrac{8k_1^2-6}{3+4k_1^2}=\lambda\left(\dfrac{8-6k_1^2}{4+3k_1^2}-a\right).\end{cases}$

消去 $\lambda$，得 $a(3+4k_1^2)-(8k_1^2-6)=8-6k_1^2-a\cdot(4+3k_1^2)$，解得 $a=\dfrac{2}{7}$.

所以，直线 $l$ 过定点，定点坐标为 $\left(\dfrac{2}{7},0\right)$，

巩固练习

1、1)**解**　由题设知 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$，

结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$.所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**　由题设知，直线 $PQ$ 的方程为 $y=k(x-1)+1(k\neq 2)$，代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

得 $(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$.

由已知 $\Delta=[-4k(k-1)]^2-4(1+2k^2)\cdot 2k(k-2)>0$，得 $k<-2$ 或 $k>0$ 且 $k\neq 2$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{4k(k-1)}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k(k-2)}{1+2k^2}$.

从而直线 $AP$，$AQ$ 的斜率之和

$k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1+1}{x_1}+\dfrac{y_2+1}{x_2}=\dfrac{kx_1+2-k}{x_1}+\dfrac{kx_2+2-k}{x_2}$

$=2k+(2-k)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=2k+(2-k)\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

$=2k+(2-k)\dfrac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-2(k-1)=2.$

所以直线 $AP$ 与 $AQ$ 的斜率之和为定值 2.

2、【解】（1）由题意得，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{a^2}{c}-c=1$，解得 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，$b=1$.

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）由题意知 $OP$ 的斜率存在.

当 $OP$ 的斜率为 0 时，$OP=\sqrt{2}$，$OQ=\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}=1$.

当$OP$的斜率不为0时，设直线$OP$方程为$y=kx$.

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=kx,\end{cases}$得$\left(2k^2+1\right)x^2=2$，解得$x^2=\dfrac{2}{2k^2+1}$，所以$y^2=\dfrac{2k^2}{2k^2+1}$，

所以$OP^2=\dfrac{2k^2+2}{2k^2+1}$. 因为$OP\perp OQ$，所以直线$OQ$的方程为$y=-\dfrac{1}{k}x$.

由$\begin{cases}y=\sqrt{2},\\ y=-\dfrac{1}{k}x\end{cases}$得$x=-\sqrt{2}k$，所以$OQ^2=2k^2+2$.

所以$\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}=\dfrac{2k^2+1}{2k^2+2}+\dfrac{1}{2k^2+2}=1$. 综上，可知$\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}=1$.

3、⑴由题意得$2c=2$，所以$c=1$，又$\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{3}{2b^2}=1$，消去$a$可得，$2b^4-5b^2-3=0$，解得$b^2=3$或$b^2=-\dfrac{1}{2}$（舍去），则$a^2=4$，所以椭圆$E$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

⑵（ⅰ）设$P(x_1,y_1)(y_1\neq 0)$，$M(2,y_0)$，则$k_1=\dfrac{y_0}{2}$，$k_2=\dfrac{y_1}{x_1-2}$，

因为$A,P,B$三点共线，所以$y_0=\dfrac{4y_1}{x_1+2}$，所以，$k_1k_2=\dfrac{y_0y_1}{2(x_1-2)}=\dfrac{4y_1^{\,2}}{2(x_1^2-4)}$，8分

因为$P(x_1,y_1)$在椭圆上，所以$y_1^2=\dfrac{3}{4}(4-x_1^2)$，故$k_1k_2=\dfrac{4y_1^{\,2}}{2(x_1^2-4)}=-\dfrac{3}{2}$为定值．10分

（ⅱ）直线$BP$的斜率为$k_2=\dfrac{y_1}{x_1-2}$，直线$m$的斜率为$k_m=\dfrac{2-x_1}{y_1}$，则直线$m$的方程为

$y-y_0=\dfrac{2-x_1}{y_1}(x-2)$,

$$y=\frac{2-x_1}{y_1}(x-2)+y_0=\frac{2-x_1}{y_1}x-\frac{2(2-x_1)}{y_1}+\frac{4y_1}{x_1+2}=\frac{2-x_1}{y_1}x+\frac{2(x_1^{\,2}-4)+4y_1^2}{(x_1+2)y_1}$$

$$=\frac{2-x_1}{y_1}x+\frac{2(x_1^{\,2}-4)+12-3x_1^2}{(x_1+2)y_1}=\frac{2-x_1}{y_1}x+\frac{2-x_1}{y_1}=\frac{2-x_1}{y_1}(x+1)$$，所以直线$m$过定点