期末模拟 2 加试

1.从 5 本不同的科普书和 4 本不同的数学书中选出 4 本，送给 4 位同学，每人 1 本，问：

（1）如果科普书甲和数学书乙必须送出，共有多少种不同的送法？

（2）如果选出的 4 本书中至少有 3 本科普书，共有多少种不同的送法？（各问用数字作答）

解：（1）$C_7^2A_4^4=504$（2）$(C_5^4+C_5^3C_4^1)A_4^4=1080$种.

2. 某校校庆，各届校友纷至沓来，某班共来了 n 位校友(n>8 且 n∈$\mathbf{N}^*$)，其中女校友 6 位，组委会对这 n 位校友登记制作了一份校友名单，现随机从中选出 2 位校友代表，若选出的 2 位校友是一男一女，则称为“最佳组合”.

(1) 若随机选出的 2 位校友代表为“最佳组合”的概率不小于$\frac{1}{2}$，求 n 的最大值；

(2) 当 n＝12 时，设选出的 2 位校友代表中女校友人数为ξ，求ξ的分布列.

解: (1) 由题意可知，所选 2 人为“最佳组合”的概率为$\frac{C_{n-6}^1C_6^1}{C_n^2}=\frac{12(n-6)}{n(n-1)}$，则$\frac{12(n-6)}{n(n-1)}\geqslant\frac{1}{2}$，化简得 $n^2-25n+144\leqslant0$，解得 9≤n≤16，故 n 的最大值为 16.

(2) 由题意得，ξ的可能取值为 0，1，2，

则 $P(\xi=0)=\frac{C_6^2}{C_{12}^2}=\frac{5}{22}$，$P(\xi=1)=\frac{C_6^1C_6^1}{C_{12}^2}=\frac{6}{11}$，$P(\xi=2)=\frac{C_6^2}{C_{12}^2}=\frac{5}{22}$，

ξ的分布列为

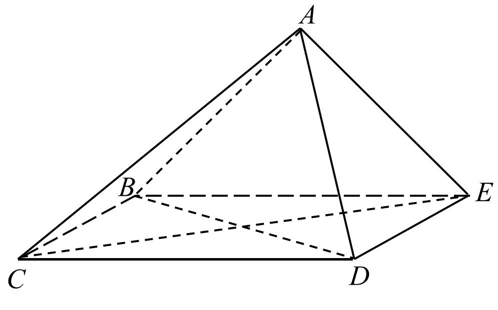
ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{22}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{22}$

3. 如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，底面 $BCDE$ 为平行四边形，平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$，$AB=AE$，

$DB=DE$，$\angle BAE=\angle BDE=90^\circ$.

（1）求异面直线 AB 与 DE 所成角的大小；

（2）求二面角 $B-AE-C$ 的余弦值.



解：设 BE 的中点为 O，连结 AO，DO，

由于 $AB=AE$，$BO=OE$，所以 $AO\perp BE$，同理 $DO\perp BE$.

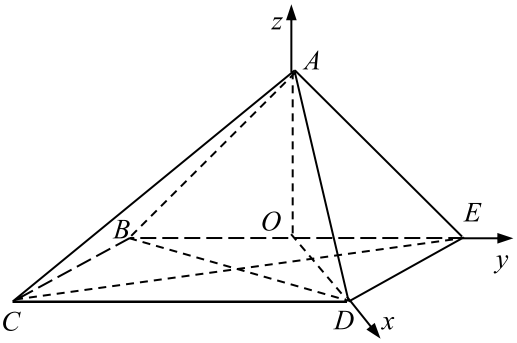
又因为平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$，平面 $ABE\cap$ 平面 $BCDE=BE$，所以 $AO\perp$ 平面 $BCDE$，

由题意，$BE^2=2AB^2=2DB^2$，所以 $AB=BD=DE=AE$.

解法一：（1）不妨设 $OA=a$，以 O 为坐标原点，

建立如图所示空间直角坐标系 O-xyz，则 $A(0,0,a)$，$B(0,-a,0)$，$C(a,-2a,0)$，

$D(a,0,0)$，$E(0,a,0)$． 所以 $\overrightarrow{AB}=(0,-a,-a)$，$\overrightarrow{DE}=(-a,a,0)$，



因为$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{-a^2}{\sqrt{2}a\sqrt{2}a}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DE}$的夹角为120°，

所以异面直线AB与DE所成角为60°．

（2）设平面ACE的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，因为$\overrightarrow{AE}=(0,a,-a)$，$\overrightarrow{EC}=(a,-3a,0)$，

所以$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{EC}=0$，所以，$y=z$且$x=3y$，取$y=z=1$，得$x=3$，所以，$\overrightarrow{n_1}=(3,1,1)$，

又平面ABE的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$，设二面角$B-AE-C$的平面角为$\theta$，由

$\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{11}}=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$，因此，二面角$B-AE-C$的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$．

4．已知$(1+x)^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$.

(1)求$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}$的值；

(2)求$\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}}-\dfrac{1}{a_{2n}}$的值.

解　(1)令$x=0$得，$a_0=1$；令$x=1$得，$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}=2^{2n}$.

于是$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}=2^{2n}-1$.

(2)$a_k=C_{2n}^k$，$k=1，2，3，\cdots，2n$，

首先考虑$\dfrac{1}{C_{2n+1}^k}+\dfrac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}=\dfrac{k!(2n+1-k)!}{(2n+1)!}+\dfrac{(k+1)!(2n-k)!}{(2n+1)!}=\dfrac{k!(2n-k)!(2n+1-k+k+1)}{(2n+1)!}$

$=\dfrac{k!(2n-k)!(2n+2)}{(2n+1)!}=\dfrac{2n+2}{(2n+1)C_{2n}^k}$,

则$\dfrac{1}{C_{2n}^k}=\dfrac{2n+1}{2n+2}\left(\dfrac{1}{C_{2n+1}^k}+\dfrac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\right)$,

因此$\dfrac{1}{C_{2n}^k}-\dfrac{1}{C_{2n}^{k+1}}=\dfrac{2n+1}{2n+2}\left(\dfrac{1}{C_{2n+1}^k}-\dfrac{1}{C_{2n+1}^{k+2}}\right)$.

故$\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}}-\dfrac{1}{a_{2n}}=\dfrac{2n+1}{2n+2}\left(\dfrac{1}{C_{2n+1}^1}-\dfrac{1}{C_{2n+1}^3}+\dfrac{1}{C_{2n+1}^3}-\dfrac{1}{C_{2n+1}^5}+\cdots+\dfrac{1}{C_{2n+1}^{2n-1}}-\dfrac{1}{C_{2n+1}^{2n+1}}\right)=\dfrac{2n+1}{2n+2}\left(\dfrac{1}{C_{2n+1}^1}-\dfrac{1}{C_{2n+1}^{2n+1}}\right)=\dfrac{2n+1}{2n+2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-1\right)=-\dfrac{n}{n+1}$.