

引导学生在数学建模学习中 “长见识、悟道理”的思考

姜文 吕传汉

(贵州师范大学数学科学学院 550025)

1 问题提出

进入21世纪,随着《义务教育数学课程标准(实验)》和《普通高中数学课程标准(实验)》的相继发布,“模型思想”和“数学建模”正式进入我国基础教育.2010年后,我国启动的新一轮基础教育数学课程标准修订从核心素养的角度赋予了模型思想和数学建模新的涵义,模型思想和数学建模再次作为核心内容进入中小学数学课程标准.^[1]《义务教育数学课程标准(2011年版)》提出了数感、符号意识、运算能力、……、模型思想等十大数学核心概念,并指出:模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径.^[2]《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出了六大数学核心素养,数学建模是其中之一.^[3]由此可见,我国中小学数学课程重视学生模型思想和数学建模素养的培养.

“纵观世界各国的数学课程改革,通过数学建模来建立数学与外部世界的联系成为共同关注的焦点”。“数学与外部世界的联系,是数学发展到今天其在自身的舞台上最精彩的表演”.今日之数学已突破了传统的应用范围向人类几乎所有的知识领域渗透,而各门学科向着“数学化”发展,也成为当今科技发展的一个重要趋势.^[4]

当今世界各国的竞争,归根到底是科技的竞争、人才的竞争.而人才的培养,归根于教育特别是基础教育.2018年9月10日,习近平总书记在全国教育大会上指出:培养一代又一代拥护中国共产党领导和我国社会主义制度、立志为中国特色社会主义奋斗终身的有用人才,要在增长知识见识上下功夫,教育引导珍惜学习时光,心无旁骛求知问学,增长见识,丰富学识,沿着求真理、

悟道理、明事理的方向前进.

作为中国新时代教育的要求,可以将“长见识、悟道理”作为课堂教学的重要目标,作为对学生核心素养培育的切入点,借以促进学生核心素养的培育.

2 “长见识、悟道理”是课堂学习的目标

“见识”是知识积累与实践的产物,“见识”比“知识”重要,涉猎广泛、视野开阔,是一个人对某件事的洞察能力和对知识面涉猎广泛的程度.它是人能明智地认识事物和正确地做出判断的能力,是一个人对事物的看法和态度;见识是智慧的展现,主要是来自于个人的丰富经验以及知识的淬炼.

“道理”是指事情或论点的是非得失的根据、理由、情理.^①道理需要去“悟”,“悟”的意思是理解、明白、感悟、觉醒;“悟”就是指体会到了某件事的意义.悟道理,就是认识和把握事物的客观规律.

学习不仅仅是学习知识,更多地是领悟和感受见识.学习上悟道理,就是领悟、理解了某篇文章、故事、情境、原理、定理或结构中所包含的哲理.因此,将“长见识、悟道理”作为课堂学习目标培育学生核心素养是恰当的.

3 在数学建模学习中“长见识、悟道理”

已有研究^{[5]~[14]}显示,我国学生数学建模的能力和水平并不理想,数学建模课程的实施也并不如意.一方面,数学建模能力是数学综合能力的体现,它需要学生有识别问题、提炼数学信息、构

^① 中国社会科学院语言研究所词典编辑室编.现代汉语词典(第6版)[M].北京:商务印书馆,2012:269.

建数学问题、解决数学问题以及分析与检验解答过程等能力,是一个综合运用数学知识和思想方法解决问题的过程.因此数学建模的学习是一个较长期的累积性学习过程.^[9]另一方面,数学建模课程设计存在一些缺陷^{[5][8]},师资的配置也跟不上.总体来说,导致我国学生数学建模水平不高的因素是多方面的.好在新修订的《义务教育数学课程标准(2011年版)》和《普通高中数学课程标准(2017年版)》均突出了“数学建模”的重要性,相信今后这种局面将会得到大大改善.

在数学的教学中,让学生了解数学模型、特别是了解数学模型的形成过程是非常重要的.^[15]就数学建模的课程和教学来说,如何让学生在学习中有所收获、受到启迪?我们认为,从“长见识、悟道理”的角度出发引导学生思考将是一条有效的途径.下面举例加以说明.

3.1 案例分析

案例^[9]: (削菠萝)四月刚好是菠萝收获的季节,为使我们能品尝到新鲜的菠萝,水果店都有专人帮助我们削菠萝皮,这是一个艺术性的刨削过程,削完后,菠萝上留下的是一条条螺线.请你从数学角度来思考,人们为什么这样削菠萝?

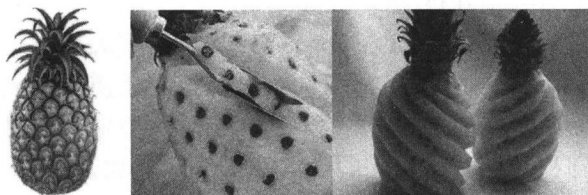


图 1

对于这样一个实际问题,第一步要理解情境,厘清关系,弄清问题.情境中要求学生“从数学的角度思考为什么要这样削菠萝”,需要从两方面考虑,一方面是从水果店的角度来看,他们总是希望削的时间越短越好;另一方面,从消费者的角度来看,通常来讲,消费者往往希望削完菠萝之后剩下的菠萝肉越多越好.

第二步,考虑了这两方面的因素之后,提什么样的问题才是合理的呢?也即是说在削菠萝的时候怎样才能做到既快速又能剩下尽可能多的菠萝肉呢?此时,需要将“剩下尽可能多的菠萝肉”这一说法做一个等价的转述,即削菠萝的时候,尽可能少地削除可食用的菠萝肉就可以了.从数学的

角度来看,就是要使削菠萝的刀在菠萝上走的路程尽可能短才行.

第三步,明确问题之后,需考虑建立与之相关的数学模型.一个普遍而比较合理的认识就是,可以把菠萝近似地看成为圆柱体,菠萝表面上的菠萝籽按行或列来排列,每一行或列上有相同数量的菠萝籽,这些菠萝籽交错排列着,它们可以用螺旋线连接起来,如图 2 所示.

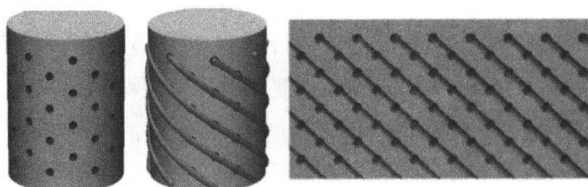


图 2

进一步观察,菠萝上被削出的螺线有这样的结构,即上一行的菠萝籽与下一行的相邻的菠萝籽可以连接起来成为一条“斜线”.按照立体图形的平面展开图,可将圆柱体展开成平面矩形,这些螺旋线即变为直线,如果把菠萝籽看成点,那么这些直线上就规律地排列着“点”,与横向直线和纵向直线比较,这些“斜线”以最短的距离将所有点连接起来,如图 3 所示.接下来就要从数学的角度来论证这个推测.

第四步,确定参数、求解模型.观察平面展开图,相邻的斜着排列的四个点围成一个正方形(如图 3 所示),显然,该正方形的边长小于对角线的长,故而斜着走刀削菠萝,刀走的路程最短.下面从数学上论证这个推断:假设横线或者纵线上点与点的距离是 x ,即小正方形的对角线的长为 x ,则小正方形的边长(即斜着排列的相邻两点之间的距离)为 $\frac{\sqrt{2}}{2}x$,这样斜线长度之和与横线长度之和或纵线长度之和相比,短了近 30%.

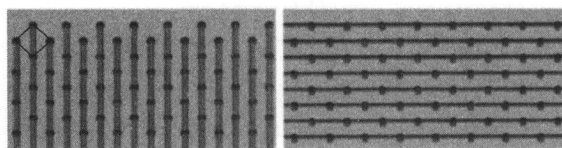


图 3

现在假设一行上有 n 个点,一列上有 k 个点.按照上述规律所连接的斜线,它是从第一行一

直通到最后一行. 如果从列的角度来看: 有 $2n$ 列, 并且每列上有 k 个点, 这样对角线上就一共连接了 $2kn$ 个点; 如果从行的角度来看, 有 $2k$ 行, 并且每行上有 n 个点, 同样得出对角线上共有 $2kn$ 个点. 如果从螺旋线的角度来看: 有 n 根螺旋线, 每根螺旋线上有 $2k$ 个点, 那么总长度就是 $\frac{\sqrt{2}}{2}x \cdot 2kn = \sqrt{2}knx$.

第五步, 根据实际检验结果. 一方面, 按螺旋线的方法削菠萝是最有效的, 而且也是最快的; 另外一方面, 按照这种方法削菠萝可以多保留近 30% 的菠萝肉. 因而该方法兼顾了商家和消费者的需求, 削菠萝的时候不仅节省时间, 而且让购买者获得尽可能多的菠萝肉, 是最佳方法.

3.2 讨论

上述问题学生经历了从实际问题中提出问题、建立模型、求解检验等过程, 每经历一个环节都是一次质的飞跃. 那么, 从“实际情境”到“提出问题”、“建立模型”、“求解模型”以及“检验结果”的每一个环节, 要让学生“长什么见识、悟出什么道理”呢?

首先, 如何确定研究的问题? 学生遇到实际生活中的一个问题, 这个问题是常见的, 但是很多情况下学生并不在意, 也不去深究为什么要这样削菠萝, 更不会有意识地从数学的角度来探究这个问题. 现在问题摆出来了, 而且要求学生用数学的眼光来“看”这个现象. 无疑, 这个过程让学生感受到数学与生活的关联, 从情感、态度上重新认识数学(即使有的同学根本不知道如何用数学的知识和方法来解决该问题). 接下来就应该思考这个实际现象和数学的什么问题联系起来? 怎样联系? 从哪些方面考虑二者之间的关联? 等等. 一个基本的常识就是, 作为消费者, 总是希望菠萝削皮之后剩下尽可能多的菠萝肉, 对于商家, 总是希望削菠萝的时间越短越好. 于是猜想, 有可能这样削皮剩下的菠萝肉最多而且速度最快! 那么, 怎么从数学的角度来说明这个事情呢? 如果有几种削皮的方案的话, 那么就应该寻找损失菠萝肉最少且削的速度最快的一种. 也就是说, 使削刀尽量短的时间内在菠萝上走的路程也尽可能短“应该”就可以达到目的了. 因此, 需要研究的问题就提出来了: 用线将菠萝籽连起来, 怎样连才能使得总长

度最小(而且削皮的速度尽可能地快)? 在这一过程中, 学生长什么知识、悟出什么道理呢? 我们认为至少有两点: 一是数学与生活的关联. 数学是有用的, 有可能曾经认为数学无用武之地的一些学生会因此而改变自己对数学的态度, 开始对数学产生兴趣; 二是如何从实际情境中提出数学问题. 这一环节中, 让学生明白提出数学问题的道理是珍贵的!

其次, 建立什么样的模型来求解问题? 要寻求一种将菠萝籽连起来长度最短的线, 需要找到一个具体的模型. 通过观察菠萝的形状, 可以考虑用圆柱体来近似代替菠萝, 菠萝籽用圆柱体表面规律排列的一些点代替. 在这一过程中, 学生明白用数学来研究生活中的问题, 不可能像研究数学本身那样是精确的, 近似计算往往是处理问题的一种手段. 而近似的追求目标是使得结果尽可能接近真实的问题, 因而如何选择模型进行研究就是关键的.

再次, 怎样确定参数和求解参数? 当问题、模型都确定了, 接下来就是寻找什么参数进行计算了. 要确定研究的参数, 需结合问题和目标. 一个事实是, 两点之间的连线, 线段最短. 本问题的最终目标是寻找线段连线之和最小, 故而参数可以考虑图形的边长. 在假设的条件下, 横竖相邻两个菠萝籽的距离相等, 因此可以设这个距离的长度为 x , 然后用它来计算斜线的点连线之和, 并分别与横线或者纵线上的点的连线之和作比较, 探寻哪种连线之和最短(这与实际中不是竖着削, 也不是横着削, 而是斜着削的情况类似). 这一过程能让学生明白, 在确定了研究的问题之后, 如何抓关键——准确确定参数. 找准参数是求解结果和应用结果的关键一步, 参数不合理、不准确, 求解过程可能很繁杂, 结果与实际情境也可能会相差较大, 没有说服力. 当然, 遇到这种与实际情况相差较大的, 还可以重新修改方案, 再次求解, 毕竟, 数学建模往往不能一次成功, 而是一个不断改进模型求解参数并检验结果的循环过程. 但是, 这不是我们希望遇到的, 我们期望的是尽可能少的次数就能完成任务.

最后, 如何检验和应用结果? 当完成了以上各个步骤之后, 就是检验数学计算的结果与实际情境是否吻合了. 这一过程能让学生明白准确的

数学运算结果如何近似地解释实际问题. 因为我们得到的是实际问题的一个近似值, 这个值的可信度有多大? 能不能接受? 是否需要修改? 等等, 需要从多个角度来考虑.

在整个数学建模过程中, 或许只有极少数学生能够完成全部过程的每个环节和阶段, 利用数学的知识和方法解决该实际问题, 而大部分学生只能完成其中的一个或两个步骤. 尽管如此, 即使对于只能完成其中一个步骤的学生, 这样的过程也有助于提高他们数学建模的信心, 积淀建模的核心素养. 例如, 通过观察, 发现相邻的四个菠萝籽可以构成正方形的四个顶点, 进而将问题转化为研究图形的关系. 这一过程或许使学生学会用数学的眼光看待外部世界, 树立良好的数学情感 and 态度.

4 结束语

总的来说, 数学建模的整个过程, 让学生体会运用数学解决实际问题的方法, 长了“用数学的眼光观察世界、用数学的语言表达世界、用数学思维思考世界”的见识, 领悟到“数学与人类生活和社会发展紧密关联”的道理.

尽管中学数学建模目前的状况并不理想, 绝大部分学生的建模能力都比较低. 然而, 引导学生在数学建模学习中“长见识、悟道理”应该是我们追求的一种课堂教学价值取向, 将“长见识、悟道理”作为课堂学习目标之一来培育学生核心素养. “长见识、悟道理”需要通过学生的主动学习来实现, 探索、尝试、实验和实施有利于学生主动学习的教学形态, 是当前数学教学值得关注的问题. 理解和把握与“长见识”“悟道理”相关的教学之道, 是数学教学深入改革的方向.

(上接第25页)

参考文献

- [1]徐利治, 张鸿庆. 数学抽象度概念与抽象度分析法[J]. 数学研究与评论, 1985, 5(2): 133-140
- [2]史宁中. 数学基本思想 18 讲[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2016: 14
- [3]邵光华, 章建跃. 数学概念的分类、特征及其教学探讨[J]. 课程·教材·教法, 2009, 29(7): 47-51
- [4]曹才翰, 章建跃. 数学教育心理学[M]. 3 版. 北京: 北京师范大学出版社, 2014: 112

参考文献

- [1]牛伟强. 高中生数学建模能力发展研究[D]. 华东师范大学, 2019
- [2]中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012
- [3]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018
- [4]教育部基础教育课程教材专家工作委员. 义务教育数学课程标准(2011 年版)解读[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012: 107
- [5]李明振, 喻平. 高中数学建模实施的背景、问题与对策[J]. 数学通报, 2007, 47(11): 8-14
- [6]陈蓓. 从 PME 视角看数学建模素养及其培养[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(4): 5-10
- [7]李贺, 张卫明. 基于质量检测的初中学生数学建模发展状况的调查研究[J]. 数学教育学报, 2017, 26(1): 19-21, 87
- [8]朱娅梅. 我国八年级学生数学建模能力的调查研究[J]. 上海教育科研, 2017(4): 51-54
- [9]徐斌艳. 中德学生数学建模能力水平的比较分析——以中国上海和德国巴登符腾堡州学生为例[J]. 上海教育科研, 2008(8): 66-69
- [10]徐斌艳, 沈丹. 我国学生的数学建模能力水平分析——以 6~9 年级学生的“缝制足球”实验为例[J]. 中学数学月刊, 2014(7): 37-40
- [11]纪雪颖. 高中学生数学建模能力水平研究——以上海若干高中为例[D]. 华东师范大学, 2010
- [12]张淑梅, 何雅涵, 保继光. 高中数学核心素养的统计分析[J]. 课程·教材·教法, 2017, 37(10): 50-55
- [13]孙翔宇. 上海市高中生数学建模能力的调查与分析[J]. 教育测量与评价, 2016(6): 44-49
- [14]徐斌艳, LUDWIG Matthias. 中学生数学建模能力水平的实验分析[J]. 中学数学月刊, 2007(11): 1-2, 30
- [15]史宁中. 数学思想概论, 第 5 辑, 自然界中的数学模型[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 2015: 2
- [16]中国社会科学院语言研究所词典编辑室编. 现代汉语词典(第 6 版)[M]. 北京: 商务印书馆, 2012

学出版社, 2014: 112

- [5][美]洛林. W. 安德森等. 布鲁姆教育目标分类学修订版分类学视野下的学与教及其测评[M]. 北京: 外语教学与研究出版社, 2009: 69
- [6]人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学课程教材研究开发中心编著. 普通高中教科书数学必修第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 60-63
- [7]章建跃. 如何帮助学生建立完整的函数概念[J]. 数学通报, 2020, 59(9): 1-8