

# 江苏省仪征中学 2018—2019 学年度第二学期期末模拟试题（三）

## 高二数学

### 一、填空题

1. 已知集合  $A = \{x | |x| \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_

2. 计算  $\frac{(1+i)(2+i)}{i}$  的结果为 \_\_\_\_\_

3. 设  $f_0(x) = \cos x$ ,  $f_1(x) = f_0'(x)$ ,  $f_2(x) = f_1'(x)$ ,  $\dots$ ,  $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

则  $f_{2019}(x) =$  \_\_\_\_\_

4. 点  $(x_0, y_0)$  到直线  $Ax + By + c = 0$  的距离公式为  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ , 通过类比的方法,

可求得: 在空间中, 点  $(1, 1, 2)$  到平面  $x + y + 2z + 3 = 0$  的距离为 \_\_\_\_\_

5. 用数学归纳法证明不等式  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} \geq 1$  ( $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ )

从  $n=k$  到  $n=k+1$  时, 左边的项数增加了 \_\_\_\_\_ 项.

6. “ $\log_2 a > \log_2 b$ ” 是 “ $2^a > 2^b$ ” 的 \_\_\_\_\_ 条件. (从 “充分不必要、必要不充分、充要、既不充分也不必要” 中选一填空)

7. 若直线  $y = 2x + b$  是曲线  $y = e^x - 2$  的切线, 则实数  $b =$  \_\_\_\_\_

8. 函数  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  的单调减区间为 \_\_\_\_\_

9. 已知  $C_n^4 = C_n^6$ , 设  $(3x-4)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_n(x-1)^n$ ,

则  $a_1 + a_2 + \dots + a_n =$  \_\_\_\_\_

10. 已知函数  $f(x) = e^x - e^{-x} - x$ , 则不等式  $f(x^2 - 4) + f(3x) > 0$  的解集为 \_\_\_\_\_

11. 已知函数  $f(x) = |x^2 - 6|$ , 若  $a < b < 0$ , 且  $f(a) = f(b)$ , 则  $a^2b$  的最小值是 \_\_\_\_\_

12. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln x$ , 若对任意两个不等的正数  $x_1, x_2$ , 都有

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_

13. 如果函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上是增函数，而函数  $y=\frac{f(x)}{x}$  在区间  $I$  上是减函数，那么称区间  $I$

是函数  $y=f(x)$  的“缓增区间”. 若区间  $[2a, 4a-a^2]$  是函数  $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{9}{2}$  的“缓增区间”，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_

14. 已知函数  $f(x)=\begin{cases} x\ln x-2x, & x>0 \\ x^2+\frac{3}{2}x, & x\leq 0 \end{cases}$  的图象上有且仅有四个不同的点关于直线  $y=-1$

的对称点在  $y=kx-1$  的图象上，则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 二、解答题

15. (14 分) 已知复数  $z=3+bi(b\in R)$ ，且  $(1+3i)\cdot z$  为纯虚数.

(1) 求复数  $z$ ； (2) 若  $w=\frac{z}{2+i}$ ，求复数  $w$  的模  $|w|$ .

16. (14 分) 给出两个命题：

命题  $p$ ：关于  $x$  的不等式  $x^2+(a-1)x+a^2>0$  的解集为  $R$ ，

命题  $q$ ：函数  $y=(2a^2-a)^x$  为增函数.

(1) 若命题  $p$  且  $q$  是真命题，求实数  $a$  的取值范围；

(2) 若命题  $p$  或  $q$  为真， $p$  且  $q$  为假，求实数  $a$  的取值范围。

17. (14 分) 在班级活动中, 4 名男生和 3 名女生站成一排表演节目:

(写出必要的数学式, 结果用数字作答)

- (1) 三名女生互不相邻, 有多少种不同的站法?
- (2) 四名男生相邻有多少种不同的排法?
- (3) 女生甲不能站在左端, 女生乙不能站在右端, 有多少种不同的排法?
- (4) 甲乙丙三人按高低从左到右有多少种不同的排法? (甲乙丙三位同学身高互不相等)

18. (16 分) 已知二次函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) - f(x) = 2x (x \in R)$ , 且  $f(0) = 1$ 。

- (1) 求  $f(x)$  的解析式;
- (2) 当  $x \in [-1, 1]$  时, 不等式  $f(x) > 2x + m$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围;
- (3) 设  $g(t) = f(2t + a)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , 求  $g(t)$  的最大值。

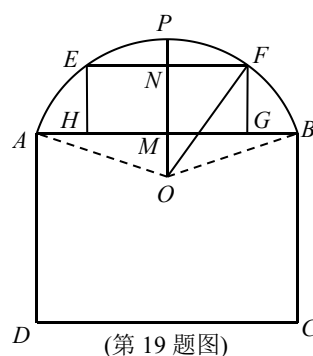
19. (16 分) 右图为某仓库一侧墙面的示意图, 其下部是一个矩形  $ABCD$ , 上部是圆弧  $AB$ , 该圆弧所在圆的圆心为  $O$ . 为了调节仓库内的湿度和温度, 现要在墙面上开一个矩形的通风窗  $EFGH$  (其中  $E, F$  在圆弧  $AB$  上,  $G, H$  在弦  $AB$  上). 过  $O$  作  $OP \perp AB$ , 交  $AB$  于  $M$ , 交圆弧  $AB$  于  $P$ . 已知  $OP=10$ ,  $MP=6.5$  (单位: m), 记通风窗  $EFGH$  的面积为  $S$  (单位:  $\text{m}^2$ ).

(1) 按下列要求建立函数关系式:

(i) 设  $\angle POF = \theta$  (rad), 将  $S$  表示成  $\theta$  的函数;

(ii) 设  $MN = x$  (m), 将  $S$  表示成  $x$  的函数;

(2) 试问通风窗的高度  $MN$  为多少时, 通风窗  $EFGH$  的面积  $S$  最大?



20. (16 分) 已知函数  $f(x) = \ln x + x - ax^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

(1) 若  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极值, 求  $a$  的值;

(2) 设  $g(x) = f(x) + (a-3)x$ , 试讨论函数  $g(x)$  的单调性;

(3) 当  $a = -2$  时, 若存在正实数  $x_1, x_2$  满足  $f(x_1) + f(x_2) + 3x_1x_2 = 0$ ,

求证:  $x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$ .

## 期末模拟试题（三）高二数学（答案）

### 一、填空题

1.  $\{0,1\}$       2.  $3-i$       3.  $\sin x$       4.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$       5. 2  
 6. 充分不必要      7.  $-2\ln 2$       8.  $(0,1), (1,e)$       9. 1023      10.  $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$   
 11. -16      12.  $[1, +\infty)$       13.  $[\frac{1}{2}, 1]$       14.  $(\frac{1}{2}, 1)$

### 二、解答题

15. 解 (1)  $(1+3i) \cdot (3+bi) = (3-3b) + (9+b)i$        $\because (1+3i) \cdot z$  是纯虚数  
 $\therefore 3-3b=0$ , 且  $9+b \neq 0$        $\therefore b=1$ ,  $\therefore z=3+i$

$$(2) w = \frac{3+i}{2+i} = \frac{(3+i) \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{7-i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i \quad \therefore |w| = \sqrt{(\frac{7}{5})^2 + (\frac{1}{5})^2} = \sqrt{2}$$

16. 解: (1) 若  $p$  为真, 则  $\Delta = (a-1)^2 - 4a^2 < 0$ , 即  $3a^2 + 2a - 1 > 0$ , 解得  $a < -1$  或  $a > \frac{1}{3}$

若  $q$  为真, 则  $2a^2 - a > 1$ , 解得  $a < -\frac{1}{2}$  或  $a > 1$

因为命题  $p$  且  $q$  是真命题, 所以  $p$ 、 $q$  都是真命题,

所以实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- (2) 因为命题  $p$  或  $q$  为真,  $p$  且  $q$  为假, 所以  $p$ 、 $q$  一真一假

若  $p$  真  $q$  假, 则  $\frac{1}{3} < a \leq 1$       若  $p$  假  $q$  真, 则  $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$

综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, 1]$

17. (1) 先排 4 个男生有  $A_4^4$  种, 再把 3 个女生插入两个男生之间或两端有  $A_5^3$  种, 所以三个女生互不相邻的排法为  $A_4^4 A_5^3 = 1440$  ----- 3 分

- (2) 4 个男生作为一个整体与 3 个女生有  $A_4^4$  种排法, 男生之间有  $A_4^4$  种排法, 所以四名男生相邻有  $A_4^4 A_4^4 = 576$  种排法 ----- 6 分

- (3) 法一、女生乙站在左端有  $A_6^6$  种, 女生乙不站在左端, 且女生甲不能站在左端, 女生乙不能站在右端有  $A_5^1 A_5^5 A_5^1$  种, 所以女生甲不能站在左端, 女生乙不能站在右端, 有  $A_6^6 + A_5^1 A_5^5 A_5^1 = 3720$  种不同的排法. ----- 10 分

- 法二、7 个人有  $A_7^7$  种排法, 女生甲在左端有  $A_6^6$  种, 女生乙在右端有  $A_6^6$  种, 女生甲在左端同时女生乙在右端有  $A_5^5$  种, 所以女生甲不能站在左端, 女生乙不能站在右端, 有  $A_7^7 - A_6^6 - A_6^6 + A_5^5 = 3720$  种不同的排法. ----- 10 分

(4) 法一、7 个人有  $A_7^7$  种排法, 甲乙丙三人有  $A_3^3$  种, 其中只有一种符合从高到低排列, 所以甲乙丙三人按高低从左到右有  $A_7^7 \frac{1}{A_3^3} = 840$  种不同的排法. --- 14 分

法二、先从 7 个位置中选 3 个位置有  $C_7^3$  种, 甲乙丙三人去站, 只有一种, 其余 4 个人站 4 个位置有  $A_4^4$  种, 所以甲乙丙三人按高低从左到右有  $C_7^3 A_4^4 = 840$  种不同的排法. --- 14 分

18. (1) 设  $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ , 代入  $f(x+1) - f(x) = 2x$  和  $f(0) = 1$ ,

并化简得  $\begin{cases} 2ax + a + b = 2x (x \in R), \\ c = 1 \end{cases}$ ,  $\therefore a = 1, b = -1, c = 1, \therefore f(x) = x^2 - x + 1$  ..... 4 分

(2) 当  $x \in [-1, 1]$  时, 不等  $f(x) > 2x + m$  式恒成立即不等式  $x^2 - 3x + 1 > m$  恒成立,

$$\text{令 } g(x) = x^2 - 3x + 1, \text{ 则 } g(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4},$$

当  $x \in [-1, 1]$  时,  $g(x)_{\min} = -1, \therefore m < -1$ . ..... 8 分

(3)  $g(t) = f(2t + a) = 4t^2 + (4a - 2)t + a^2 - a + 1, t \in [-1, 1]$ , 对称轴是  $x = \frac{1 - 2a}{4}$ .

① 当  $\frac{1 - 2a}{4} \geq 0$  时, 即  $a \leq \frac{1}{2}$  时,  $g(t)_{\max} = g(-1) = 4 - (4a - 2) + a^2 - a + 1 = a^2 - 5a + 7$ ;

② 当  $\frac{1 - 2a}{4} < 0$  时, 即  $a > \frac{1}{2}$  时,  $g(t)_{\max} = g(1) = 4 + (4a - 2) + a^2 - a + 1 = a^2 + 3a + 3$ .

综上所述:  $g(t)_{\max} = \begin{cases} a^2 - 5a + 7, & a \leq \frac{1}{2}, \\ a^2 + 3a + 3, & a > \frac{1}{2}. \end{cases}$  ..... 16 分

19 解: (1) 由题意知,  $OF = OP = 10, MP = 6.5$ , 故  $OM = 3.5$ .

(i) 在  $\text{Rt}\triangle ONF$  中,  $NF = OF \sin \theta = 10 \sin \theta, ON = OF \cos \theta = 10 \cos \theta$ .

在矩形  $EFGH$  中,  $EF = 2MF = 20 \sin \theta, FG = ON - OM = 10 \cos \theta - 3.5$ ,

故  $S = EF \times FG = 20 \sin \theta (10 \cos \theta - 3.5) = 10 \sin \theta (20 \cos \theta - 7)$ .

即所求函数关系是  $S = 10 \sin \theta (20 \cos \theta - 7), 0 < \theta < \theta_0$ , 其中  $\cos \theta_0 = \frac{7}{20}$ . ..... 4 分

(ii) 因为  $MN = x, OM = 3.5$ , 所以  $ON = x + 3.5$ .

在  $\text{Rt}\triangle ONF$  中,  $NF = \sqrt{OF^2 - ON^2} = \sqrt{100 - (x + 3.5)^2} = \sqrt{\frac{351}{4} - 7x - x^2}$ .

在矩形  $EFGH$  中,  $EF = 2NF = \sqrt{351 - 28x - 4x^2}, FG = MN = x$ ,

故  $S = EF \times FG = x \sqrt{351 - 28x - 4x^2}$ .

即所求函数关系是  $S = x \sqrt{351 - 28x - 4x^2}, 0 < x < 6.5$ . ..... 8 分

(2) 方法一：选择(i)中的函数模型：

$$\text{令 } f(\theta) = \sin\theta(20\cos\theta - 7),$$

$$\text{则 } f'(\theta) = \cos\theta(20\cos\theta - 7) + \sin\theta(-20\sin\theta) = 40\cos^2\theta - 7\cos\theta - 20. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } f'(\theta) = 40\cos^2\theta - 7\cos\theta - 20 = 0, \text{ 解得 } \cos\theta = \frac{4}{5}, \text{ 或 } \cos\theta = -\frac{5}{8}.$$

$$\text{因为 } 0 < \theta < \theta_0, \text{ 所以 } \cos\theta > \cos\theta_0, \text{ 所以 } \cos\theta = \frac{4}{5}. \text{ 设 } \cos\alpha = \frac{4}{5}, \text{ 且 } \alpha \text{ 为锐角},$$

则当  $\theta \in (0, \alpha)$  时,  $f'(\theta) > 0$ ,  $f(\theta)$  是增函数; 当  $\theta \in (\alpha, \theta_0)$  时,  $f'(\theta) < 0$ ,  $f(\theta)$  是减函数,

$$\text{所以当 } \theta = \alpha, \text{ 即 } \cos\theta = \frac{4}{5} \text{ 时, } f(\theta) \text{ 取到最大值, 此时 } S \text{ 有最大值.}$$

$$\text{即 } MN = 10\cos\theta - 3.5 = 4.5\text{m} \text{ 时, 通风窗的面积最大.} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

方法二：选择(ii)中的函数模型：

$$\text{因为 } S = \sqrt{x^2(351 - 28x - 4x^2)}, \text{ 令 } f(x) = x^2(351 - 28x - 4x^2),$$

$$\text{则 } f'(x) = -2x(2x - 9)(4x + 39). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为当  $0 < x < \frac{9}{2}$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增, 当  $\frac{9}{2} < x < \frac{13}{2}$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,

$$\text{所以当 } x = \frac{9}{2} \text{ 时, } f(x) \text{ 取到最大值, 此时 } S \text{ 有最大值.}$$

$$\text{即 } MN = x = 4.5\text{m} \text{ 时, 通风窗的面积最大.} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$20. \text{ 解: (1) 因为 } f(x) = \ln x + x - ax^2, \text{ 所以 } f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - 2ax,$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 在 } x = 1 \text{ 处取得极值, 所以 } f'(1) = 1 + 1 - 2a = 0, \text{ 解得 } a = 1.$$

$$\text{验证: 当 } a = 1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - 2x = -\frac{(x-1)(2x+1)}{x} (x > 0),$$

$$\text{易得 } f(x) \text{ 在 } x = 1 \text{ 处取得极大值.} \dots\dots\dots 3 \text{ 分 (没有验证扣 2 分)}$$

$$(2) \text{ 因为 } g(x) = f(x) + (a-3)x = \ln x + x - ax^2 + (a-3)x = \ln x - ax^2 + (a-2)x,$$

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (a-2) = -\frac{(2x+1)(2x-1)}{x} (x > 0).$$

$$\text{①若 } a \geq 0, \text{ 则当 } x \in (0, \frac{1}{2}) \text{ 时, } g'(x) > 0, \text{ 所以函数 } g(x) \text{ 在 } (0, \frac{1}{2}) \text{ 上单调递增;}$$

$$\text{当 } x \in (\frac{1}{2}, +\infty) \text{ 时, } g'(x) < 0, \text{ 函数 } g(x) \text{ 在 } (\frac{1}{2}, +\infty) \text{ 上单调递减.}$$

②若  $a < 0$ ,  $g'(x) = -\frac{a(x+\frac{1}{a})(2x-1)}{x} (x > 0)$ ,

当  $a < -2$  时, 易得函数  $g(x)$  在  $(0, -\frac{1}{a})$  和  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$  上单调递减;

当  $a = -2$  时,  $g'(x) \geq 0$  恒成立, 所以函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

当  $-2 < a < 0$  时, 易得函数  $g(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  和  $(-\frac{1}{a}, +\infty)$  上单调递增,

在  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$  上单调递减. ....11 分

(3) 证明: 当  $a = -2$  时,  $f(x) = \ln x + x + 2x^2$ ,

因为  $f(x_1) + f(x_2) + 3x_1x_2 = 0$ , 所以  $\ln x_1 + x_1 + 2x_1^2 + \ln x_2 + x_2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 = 0$ ,

即  $\ln x_1x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2) + 3x_1x_2 = 0$ , 所以  $2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = x_1x_2 - \ln x_1x_2$ .

令  $t = x_1x_2$ ,  $\varphi(t) = t - \ln t (t > 0)$ , 则  $\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} (t > 0)$ ,

当  $t \in (0, 1)$  时,  $\varphi'(t) < 0$ , 所以函数  $\varphi(t) = t - \ln t (t > 0)$  在  $(0, 1)$  上单调递减;

当  $t \in (1, +\infty)$  时,  $\varphi'(t) > 0$ , 所以函数  $\varphi(t) = t - \ln t (t > 0)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增.

所以函数  $\varphi(t) = t - \ln t (t > 0)$  在  $t = 1$  时, 取得最小值, 最小值为.

所以  $2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) \geq 1$ ,

即  $2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) - 1 \geq 0$ , 所以  $x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2}$  或  $x_1 + x_2 \leq -1$ .

因为  $x_1, x_2$  为正实数, 所以  $x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2}$ .

当  $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$  时,  $x_1x_2 = 1$ , 此时不存在  $x_1, x_2$  满足条件,

所以  $x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$ . ....16 分