

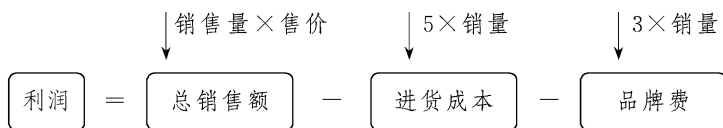
专题七 实际应用问题

微切口 23 以函数为背景的应用问题

例1 (2019·启东中学等基地学校联考)某公司代理销售某种品牌小商品,该产品进价为5元/件,销售时还需交纳品牌使用费3元/件,售价为 x 元/件,其中 $10 \leq x \leq 30$,且 $x \in \mathbf{N}^*$.根据市场调查,当 $10 \leq x \leq 15$,且 $x \in \mathbf{N}^*$ 时,每月的销售量 h (单位:万件)与 $(18-x)^2$ 成正比;当 $15 \leq x \leq 30$,且 $x \in \mathbf{N}^*$ 时,每月的销售量 h (单位:万件)与 $1 - \frac{10}{x}$ 成反比.已知售价为15元/件时,月销售量为9万件.

- (1) 求该公司的月利润 $f(x)$ (单位:万元)与每件产品的售价 x (单位:元)的函数关系式;
 (2) 当每件产品的售价为多少元时,该公司的月利润 $f(x)$ 最大? 并求出最大值.

【思维引导】



【解答】(1) 设 $h = k_1(18-x)^2$ ($10 \leq x \leq 15, x \in \mathbf{N}^*$),

$$h = \frac{k_2}{1 - \frac{10}{x}} \quad (15 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*).$$

因为当 $x=15$ 时, $h=9$,

代入上述两式可得 $k_1=1, k_2=3$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} (x-8)(18-x)^2, & 10 \leq x \leq 15, x \in \mathbf{N}^*, \\ \frac{3x(x-8)}{x-10}, & 15 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

(2) 当 $10 \leq x \leq 15, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x) = (x-8)(18-x)^2$,

所以 $f'(x) = (x-18)(3x-34)$,

令 $f'(x)=0$,得 $x = \frac{34}{3}$.

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	10	$(10, \frac{34}{3})$	$\frac{34}{3}$	$(\frac{34}{3}, 15)$	15
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$f(10)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	$f(15)$

因为 $x \in \mathbf{N}^*$,且 $f(11)=147, f(12)=144$,

所以当 $x=11$ 时, $f(x)$ 取得最大值147.

当 $15 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x) = \frac{3x(x-8)}{x-10}$.

令 $t = x - 10$,则 $f(x) = g(t) = \frac{3(t+10)(t+2)}{t} = 3\left(t + \frac{20}{t} + 12\right)$,

即 $g'(t) = 3\left(t - \frac{20}{t^2}\right) > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $5 \leq t \leq 20$ 且 $t \in \mathbf{N}^*$ 上单调递增,

所以当 $t=20$ 时, $g(t)$ 取得最大值 99, 此时 $x=30$.

综上, 当 $x=11$ 时, $f(x)$ 取得最大值 147.

答: 当每件产品的售价为 11 元时, 该公司的月利润 $f(x)$ 最大, 且最大值为 147 万元.

变式 (2019·泰州中学) 某连锁分店销售某种商品, 每件商品的成本为 4 元, 且每件商品需向总店交 a ($1 \leq a \leq 3$) 元的管理费, 预计当每件商品的售价为 x ($8 \leq x \leq 9$) 元时, 一年的销售量为 $(10-x)^2$ 万件.

(1) 求该连锁分店一年的利润 L (单位: 万元) 与每件商品的售价 x 的函数关系式 $L(x)$;

(2) 求当每件商品的售价为多少元时, 该连锁分店一年的利润 L 最大, 并求出 L 的最大值.

【解答】 (1) 该连锁分店一年的利润 L 与售价 x 的函数关系式为 $L(x) = (x-4-a)(10-x)^2$, $x \in [8, 9]$.

(2) $L'(x) = (10-x)(18+2a-3x)$,

令 $L'(x) = 0$, 得 $x = 6 + \frac{2a}{3}$ 或 $x = 10$ (舍去).

因为 $1 \leq a \leq 3$, 所以 $\frac{20}{3} \leq 6 + \frac{2}{3}a \leq 8$,

所以 $L(x)$ 在 $x \in [8, 9]$ 上单调递减,

故 $L(x)_{\max} = L(8) = (8-4-a)(10-8)^2 = 16-4a$,

所以利润的最大值为 $16-4a$.

答: 当每件商品的售价为 8 元时, 该连锁分店一年的利润 L 最大, 且最大值为 $16-4a$ 万元.

总结提升

以函数为背景的应用题题型一般与函数(分段函数)、方程(组)、不等式(组)有关, 常涉及物价、路程、产值、环保、土地等实际问题, 也常涉及角度、长度、面积、造价、利润等最优化问题.

解决这类问题一般要利用数量关系, 列出有关解析式, 然后运用函数、方程、不等式有关知识和方法加以解决, 尤其对函数最值, 二次函数、导数、基本不等式用的较多.