

【第 15 题】

1、知识与能力要求：解三角形 两角和差公式

2、主要存在问题及错因

第一问：主要问题：(1) 缺少正弦定理公式（如图 1）；(2) 解题不够简洁，“兜圈子”；(3) 表述的逻辑链不够清晰，要学习参考答案的表述，“在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\frac{5(\sin C - \sin B)}{a} = \frac{5\sin A - 8\sin B}{b+c}$ ，所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，得 $5(b+c)(c-b) = a(5a-8b)$ ，……””，特别关注加粗加下划线的字。

第二问：主要问题：(1) 缺少 $A+B+C=\pi$ ，直接写出 $\sin B = \sin(A+C)$ （如图 1）；(2) 由 $\cos C = \frac{4}{5}$ ，求 $\sin C$ 的值，缺少公式 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$ （如图 1）；(3) 解题不够简洁，“兜圈子”。此小题也可以由 $A=C$ ，得 $a=c$ ，由(1)中得到的三边之间的关系解出 b 和 c 的关系，进而得到 $\sin B = \frac{8}{5} \sin C$ （如图 2）。

典型错例

Figure 1 shows handwritten student work for problem 15, illustrating several errors:

- Left Column (Error 1):** The student starts with $\frac{5(c-b)}{a} = \frac{5a-8b}{b+c}$. They cross-multiply to get $5(c^2 - b^2) = 5a^2 - 8ab$. Then they use the identity $8ab = 5a^2 + 5b^2 - 5c^2$ to substitute for $8ab$, resulting in $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\frac{1}{4}(5a^2 + 5b^2 - 5c^2)}$, which simplifies to $\frac{4}{5}$.
- Right Column (Error 2):** The student starts with $\cos C = \frac{4}{5}$ and $\sin A = \frac{3}{5}$. They then incorrectly state $\cos A = \frac{4}{5}$ and $\sin C = \frac{3}{5}$. They use the sum formula $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \sin C \cos A$ and calculate $\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

图 1

~~若 $A=C$~~

(2) 若 $A=C$, 则 $\sin A = \sin C, a=c$

由 (1) 知: $a^2 + b^2 - c^2 = \frac{8}{5}ab$

$\therefore b^2 = \frac{8}{5}ab$

由正弦定理: $\sin B = \frac{8}{5} \sin A \sin B$

又 $B \in (0, \pi)$, $\therefore \sin B \neq 0$

$\therefore \sin B = \frac{8}{5} \sin A$

又 $\sin C = \sin A, \cos C = \frac{4}{5}, C \in (0, \pi)$

$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$ $\therefore \sin B = \frac{8}{5} \sin C = \frac{8}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

图 2

3、教学策略:

本题难度不大,扬州市均分大约在 13.39 左右,暴露的主要是答题的规范性的问题. 高考三角题的区分度往往是阅卷时对规范性的要求程度决定的,在求解三角解答题时一定要规范:(1) 运用诱导公式、同角三角函数基本关系式、两角和差的三角函数公式、正弦定理、余弦定理等公式时,必须分两步①写出原始公式,②代入数据得出结果;(2) 确定角的值及应用平方关系时必须交代角的范围;(3) 在精准确定角的范围时可利用三角函数的图像及性质;(4) 三角形中注意两边之和大于第三边、三角形的内角和等于 π . 为此在下一阶段,在规范性方面需要进一步严格要求.