考前模拟卷一

数学Ⅰ试题

注 意 事 项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1.本卷共4页,包含填空题(第1题—第14题)、解答题(第15题—第20题).本卷满分160分,考试时间为120分钟.考试结束后,请将答题卡交回.

2.答题前,请您务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置.

3.请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答,在其他位置作答一律无效.作答必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔.请注意字体工整,笔迹清楚.

4.如需作图,须用2B铅笔绘、写清楚,线条、符号等须加黑、加粗.

5.请保持答题卡卡面清洁,不要折叠、破损.一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔.

参考公式:锥体的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$(S 为底面积,h 为高)

一、填空题:本大题共14小题,每小题5分,共计70分.

1.已知集合 $A=\{x\mid x>-1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{-1,0,1,2\}$,则 $A\cap B=$________.

2.若复数 z 满足 $z=\frac{3+4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$(i为虚数单位),则 z 的虚部为________.

3.根据如图所示的伪代码,可知输出的结果 S 为________.

```
S←0
For i From 1 To 5 Step 2
    S←S+sin(i/6 π)
End For
Print S
```

4.已知 $a,b,9,11,12$ 的平均数为10,方差为2,则 $ab=$________.

5.2018年江苏数学高考理科附加题的21题是从几何证明,矩阵和变换,极坐标与参数方程,不等式四个小题中任选两个作答,考生 A 如果从这四个题目中任意选择两个完成,则几何证明被选择到的概率为________.

6.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为2,焦点到一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$,则它的焦距为________.

7.将函数 $f(x)=\sin2x-\cos2x(x\in\mathbf{R})$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位后，得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 是奇函数，则 φ 的最小值是________.

8.Rt$\triangle ABC$ 中，$AC\perp BC$，$AC=2BC=4$，将$\triangle ABC$ 分别绕 AC 和 AB 旋转一周，得到的两个旋转体的体积分别为 V_1，V_2，则$\dfrac{V_1}{V_2}=$________.

9.$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 a，b，c 成等比数列，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，则$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan C}=$________.

10.已知函数 $f(x)=x^3+mx(m>0)$，若不等式 $f(x^2-2x-2a)+f(ax-3)\leqslant0$ 对任意的 $x\in[1,3]$恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

11.在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle A=90°$，$AD/\!/BC$，$BC=2AD$，$\triangle ABD$ 的面积为 2，若$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，$BE\perp DC$，则$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$的值为________.

12.已知两点 $A(-m,0)$，$B(m,0)(m>0)$，如果在直线 $nx+y-6n-3=0(n\in\mathbf{R})$上总存在点 P，使得$\angle APB=90°$，则 m 的取值范围是________.

13.已知 x，y，z 均为正实数，且 $x+y=2$，则$\dfrac{3xyz^2+2x^2+1}{xyz}$的最小值为________.

14.设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2<0$，$a_n+a_{n+1}=2n+1$，且 $S_n=1350$，则 n 的最大值是________.

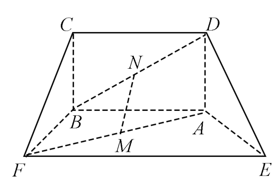
二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本小题满分 14 分)

如图，矩形 $ABCD$ 所在平面与四边形 $ABFE$ 所在平面互相垂直，$AF\perp AE$，已知 M，N 分别为 AF，BD 的中点.

(1)求证：$MN/\!/$平面 BCF；

(2)求证：$AF\perp$平面 ADE.



16.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin x\cos x-\sin^2 x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[a,\dfrac{\pi}{16}\right]$ 上递增，求实数 a 的取值范围；

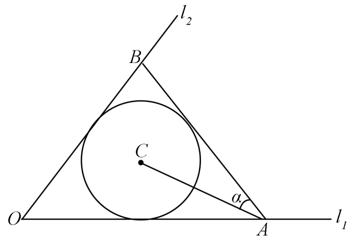
(2)若 $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，且 α 是第三象限角，求 $f(\alpha)$ 的值.

17.（本小题满分 14 分）

如图，某景区是一个以 C 为圆心，半径为 $\sqrt{3}$ km 的圆形区域，道路 l_1，l_2 成 $60°$ 角，且均和景区边界相切，现要修一条与景区相切的观光木栈道 AB，点 A，B 分别在 l_1 和 l_2 上，设 $\angle CAB=\alpha$.

(1)将木栈道 AB 的长度表示为 α 的函数，并指定定义域；

(2)求木栈道 AB 的长度的最小值.



18.（本小题满分 16 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)椭圆右顶点、右焦点分别为 A，F，过点 F 且斜率为 k 的直线和椭圆交于 D，E 两点，且 $-1\leqslant\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}\leqslant-\dfrac{5}{7}$，求斜率 k 的取值范围；

(3)直线 $x=t$ 与椭圆交于 M，N 两点，设点 P 是椭圆 C 上异于 M，N 的任意一点，且直线 MP，NP 分别与 x 轴交于点 R，S，O 为坐标原点，求证：$|OR|\cdot|OS|$ 为定值.

19.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=x-a\ln x$，$g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+ax$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)若对任意的 $x\in[3,4]$，$f(x)\geqslant g(x)$均成立，求实数 a 的取值范围；

(3)当 $a=1$ 时，若方程 $f(x)+m=0(m<-2)$有两个相异实根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_1x_2^2<2$.

20.（本小题满分 16 分）

已知无穷数列$\{a_n\}$的各项都是正数，其前 n 项和为 S_n，且满足：$a_1=a$，$rS_n=a_na_{n+1}-1$，其中 $a\neq1$，常数 $r\in\mathbf{N}$.

(1)求证：$a_{n+2}-a_n$ 是一个定值；

(2)若数列$\{a_n\}$是一个周期数列（存在正整数 T，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+T}=a_n$ 成立，则称$\{a_n\}$为周期数列，T 为它的一个周期），求该数列的最小周期；

(3)若数列$\{a_n\}$是各项均为有理数的等差数列，$c_n=2\cdot3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，问：数列$\{c_n\}$中的所有项是否都是数列$\{a_n\}$中的项？若是，请说明理由，若不是，请举出反例；

数学Ⅱ附加题

注 意 事 项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1.本卷只有解答题，供理工方向学生使用.本卷第 21 题有 A、B、C 3 个小题供选做，每位学生在 3 个选做题中选答 2 题.若学生选做了 3 题，则按选做题中的前 2 题计分.第 22、23 题为必答题.每小题 10 分，共 40 分.考试时间 30 分钟.考试结束后，请将答题卡交回.

2.答题前，请您务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置.

3.请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效.作答必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔.请注意字体工整，笔迹清楚.

4.如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗.

5.请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损.一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔.

21.【选做题】本题包括 A、B、C 三小题，请选定其中两小题作答.若多做，则按作答的前两小题评分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A.选修 4—2：矩阵与变换

已知曲线 $2x^2+2xy+y^2=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$（$a>0$）对应的变换作用下得到的曲线为 $x^2+y^2=1$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

B.选修 4—4：极坐标与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C_1：$\begin{cases} x=5\cos\theta, \\ y=4\sin\theta, \end{cases}$（$\theta$ 为参数）与曲线 C_2：$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$ 相交于 A，B 两点，求线段 AB 的长.

C.选修 4－5:不等式选讲

已知关于 x 的不等式 $|x-2|-|x-a|<2$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

【必做题】第 22 题、第 23 题,每题 10 分,共计 20 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22.(本小题满分 10 分)

为了城市环保,某智能电动汽车租赁公司备有小、中两种车型,为了推广使用,采用分时计费的方式,租用小型汽车每小时收费 10 元(不足一小时的部分按一小时计算),中型汽车每一小时收费 20 元(不足一小时的部分按一小时计算),现有甲、乙、丙三人,分别相互独立地到租车点租车(各租一车一次),设甲、乙、丙不超过一小时还车的概率分别为 $\frac{3}{4}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{1}{2}$,并且三个人每人租车都不会超过两小时,甲、乙均租用小型汽车,丙租用中型汽车.

(1)求甲、乙两人所付的费用之和等于丙所付的费用的概率;

(2)设甲、乙、丙三人所付费用之和为随机变量 ξ,求 ξ 的分布列和数学期望.

23.(本小题满分 10 分)

已知 $f_n(x)=C_n^0x^n-C_n^1(x-1)^n+\cdots+(-1)^kC_n^k(x-k)^n+\cdots+(-1)^nC_n^n(x-n)^n$,

其中 $x\in \mathbf{R}$,$n\in \mathbf{N}^*$,$k\in \mathbf{N}$,$k\leqslant n$.

(1)试求 $f_1(x)$,$f_2(x)$,$f_3(x)$的值;

(2)试猜测 $f_n(x)$关于 n 的表达式,并证明你的结论.

1.【答案】$\{0,1,2\}$

【解题探究】本题重点考查集合的运算,借助于数轴可求得 $A\cap B$.

2.【答案】$\frac{1}{2}$

【解题探究】本题重点考查复数的运算和复数的基本概念,注意虚部的定义.

【解析】$z=\frac{3+4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(3+4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{7+\mathrm{i}}{2}$.所以 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$.

3.【答案】2

【解题探究】本题重点考查伪代码和三角函数值,考查考生的读题能力.

【解析】$S=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{3}{6}\pi\right)+\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)=2$.

4.【答案】80

【解题探究】本题重点考查平均数和方差的定义.

【解析】$\begin{cases}\dfrac{a+b+9+11+12}{5}=10,\\ \dfrac{1}{5}[(a-10)^2+(b-10)^2+(9-10)^2\\ +(11-10)^2+(12-10)^2]=2,\end{cases}$

得 $\begin{cases}a+b=18,\\(a-10)^2+(b-10)^2=4,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a=8,\\b=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=10,\\b=8,\end{cases}$

所以 $ab=80$.

5.【答案】$\frac{1}{2}$

【解题探究】本题重点考查古典概型解题的基本策略,通过列举法、树形图解决计数问题.

【解析】从几何证明,矩阵和变换,极坐标与参数方程,不等式四个小题中选择两个,共有 6 个基本事件,而满足几何证明题被选中的有 3 个基本事件,因而所求概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

6.【答案】4

【解题探究】本题重点考查双曲线的离心率,焦距的定义,双曲线渐近线方程的求解及点到直线的距离公式.

【解析】双曲线的一条渐近线方程为 $bx-ay=0$,

所以焦点 $(c,0)$ 到其距离 $d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=\sqrt{3}$,又因为 $\frac{c}{a}=2$, $c^2=a^2+b^2$,所以 $c=2$,所以焦距为 4.

7.【答案】$\frac{\pi}{8}$

【解题探究】本题考查两角和的三角公式,三角函数的图象与性质的应用.

【解析】$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,于是 $g(x)=$

$\sqrt{2}\sin\left[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$,

$\because g(x)$ 是奇函数,且 $x\in\mathbf{R}$,则 $g(0)=0$,

$\therefore\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=0$,

$\therefore 2\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,$\because\varphi>0$,$\therefore k=0$ 时,$\varphi_{\min}=\frac{\pi}{8}$.

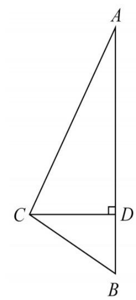
8.【答案】$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解题探究】本题考查旋转体体积的计算.

【解析】$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AC\perp BC$,$AC=2BC=4$,$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2\sqrt{5}$,

作 $CD\perp AB$ 于 D,则 $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{2\times4}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$,于是 $V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot BC^2\cdot AC=\frac{16\pi}{3}$,$V_2=\frac{1}{3}\pi CD^2\cdot(AD+DB)$

$=\frac{1}{3}\pi\cdot CD^2\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{16}{5}\pi\cdot2\sqrt{5}=\frac{32\sqrt{5}\pi}{15}$,$\therefore\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{16}{3}\pi}{\frac{32}{15}\sqrt{5}\pi}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



9.【答案】$\frac{5}{3}$

【解题探究】本题考查正弦定理,两角和的三角公式的应用.

【解析】因为 a,b,c 成等比数列,所以 $b^2=ac$.

由正弦定理得:$\sin^2B=\sin A\cdot\sin C$,$\because$ 角 B 为 $\triangle ABC$ 内角,且 $\cos B=\frac{4}{5}>0$,$\therefore 0<B<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}$

$=\frac{\cos A\sin C+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}$

$=\frac{\sin B}{\sin^2B}=\frac{1}{\sin B}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2B}}=\frac{5}{3}$.

10.【答案】$[-4,0]$

【解题探究】本题重点考查函数的奇偶性,单调性,一元二次不等式的最值问题.

【解析】由 $f(x)=x^3+mx(m>0)$ 可得 $f(-x)=-f(x)$,

$f'(x)=3x^2+m>0$,

所以 $y=f(x)$ 为奇函数，且是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数，

因而已知不等式可转化为 $f(x^2-2x-2a)\leqslant f(3-ax)$，

$x^2-2x-2a\leqslant 3-ax$，

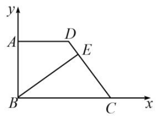
即 $x^2+(a-2)x-2a-3\leqslant 0$ 对任意的 $x\in[1,3]$ 恒成立，

$\begin{cases}1^2+(a-2)-2a-3\leqslant 0,\\3^2+(a-2)\times 3-2a-3\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-4\leqslant a\leqslant 0$.

11.【答案】$-2\sqrt{2}$

【解题探究】本题重点考查向量数量积的应用，注意方法的选择.

【解析】如图，设 $AD=a$，则 $AB=\dfrac{4}{a}$，分别以 BC，BA 所在直线为 x，y 轴建立平面直角坐标系.



得 $A\left(0,\dfrac{4}{a}\right)$，$B(0,0)$，$C(2a,0)$，

$D\left(a,\dfrac{4}{a}\right)$，

$\because \overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，$\therefore E\left(\dfrac{4}{3}a,\dfrac{8}{3a}\right)$

得到 $\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{4}{3}a,\dfrac{8}{3a}\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(a,-\dfrac{4}{a}\right)$，又 $\because BE\perp DC$，

$\therefore \dfrac{4}{3}a\times a+\dfrac{8}{3a}\times\left(-\dfrac{4}{a}\right)=0$，

解得 $a^2=2\sqrt{2}$.

$\because \overrightarrow{DA}=(-a,0)$，$\therefore \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=-a^2=-2\sqrt{2}$.

12.【答案】$[3\sqrt{5},+\infty)$

【解题探究】本题重点考查动直线过定点问题，点在圆内的判断及转化的思想方法.

【解析】由直线方程 $nx+y-6n-3=0(n\in\mathbf{R})$ 得到其过定点 $M(6,3)$，

$\because$ 在直线 $nx+y-6n-3=0(n\in\mathbf{R})$ 上总存在点 P，使得 $\angle APB=90°$，

$\therefore$ 只需 $\angle AMB\geqslant 90°$ 即点 M 在以 AB 为直径的圆内，

$\therefore \sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\leqslant m$.

13.【答案】$2\sqrt{6}$

【解题探究】本题重点考查基本不等式.

【解析】$\dfrac{3xyz^2+2x^2+1}{xyz}=3z+\dfrac{2x^2+\dfrac{(x+y)^2}{4}}{xyz}=$

$3z+\dfrac{1}{4z}\left(\dfrac{9x}{y}+\dfrac{y}{x}+2\right)\geqslant 3z+\dfrac{2}{z}\geqslant 2\sqrt{6}$.

14.【答案】51

【解题探究】本题考查数列求和的应用及分类讨论思考方法.

【解析】若 n 为偶数，则

$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)$

$=(2\times1+1)+(2\times3+1)+\cdots+(2(n-1)+1)$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

$S_{50}=1275<1350$，$S_{52}=1378>1350$，

所以这样的偶数不存在.

若 n 为奇数，则

$S_n=a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)$

$=3-a_2+(2\times2+1)+(2\times4+1)+\cdots+[2(n-1)+1]$

$=3+\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}-a_2$，

$S_{53}=1433-a_2$，

$\because a_2<0$，$\therefore S_{53}>1433>1350$，

而 $S_{51}=1328-a_2=1350$ 时，

$a_2=-22<0$，

$\therefore$ 存在 $a_2=-22<0$ 使 $S_{51}>1350$，

$\therefore n$ 的最大值是 51.

15.【解题探究】本题涉及的考点有：线面平行的判定定理，面面垂直的性质定理，线面垂直的判定定理.

(1)根据中位线得 $MN\parallel CF$，由线面平行的判定定理得出线面平行，(2)由 $AE\perp AF$，再由平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABFE$ 来得到 $AD\perp$ 平面 $ABFE$，进而得到 $AD\perp AF$，然后由线面垂直的判定定理来证出 $AF\perp$ 平面 ADE.

【解析】(1)连结 AC，

因为矩形 $ABCD$ 中，N 为 BD 的中点，

所以 N 在 AC 上且为 AC 的中点，…………………… 2 分

又因为 M 是 AF 的中点，

所以 $MN\parallel CF$，…………………………………… 4 分

又因为 $MN\not\subset$ 平面 BCF，$CF\subset$ 平面 BCF，

所以 $MN\parallel$ 平面 BCF.………………………………… 6 分

(2)因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABFE$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABFE=AB$，$AD\perp AB$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AD\perp$ 平面 $ABFE$，

因为 $AF\subset$ 平面 $ABFE$，

所以 $AD\perp AF$. …………………………………… 11 分

又因为 $AF\perp AE$，

因为 $AD\cap AE=A$，$AD\subset$ 平面 ADE，$AE\subset$ 平面 ADE，

所以 $AF\perp$ 平面 ADE. ……………………………… 14 分

【名师点睛】线面平行和线面垂直是高考中最常见的考查内容.线面平行通常由线线平行或线面平行来推出，难点为线面平行推导线线平行时平面的寻找.线面垂直通常由线线垂直和面面垂直来推导，难点是由面面垂直来推导线面垂直时线的寻找.

16.【解题探究】本题涉及的考点有二倍角的正弦、余弦公式，三角函数的单调区间，同角三角函数的关系式，两角和差的正、余弦公式.

(1)利用二倍角公式化简 $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，$\sin^2 x=$

$\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，再根据合一变形得到 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.由正弦函数的性质找到其递增区间，通过判断取特定的 k 值来得出 a 的取值范围；(2)由同角三角函数关系式和角所在的象限得 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，由二倍角公式得 $\sin 2\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=-\dfrac{3}{5}$，由两角和的正弦公式得 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，最后计算得 $f(\alpha)=-\dfrac{2}{5}$.

【解析】(1) $f(x)=\sin x\cos x-\sin^2 x=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$，…………………………… 2 分

因为 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\dfrac{3}{8}\pi+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，…………………………… 4 分

因为 $f(x)$ 在区间 $\left[a,\dfrac{\pi}{16}\right]$ 上递增，∴ $\left[a,\dfrac{\pi}{16}\right]\subseteq\left[-\dfrac{3}{8}\pi,\dfrac{\pi}{8}\right]$，所以 $a\in\left[-\dfrac{3}{8}\pi,\dfrac{\pi}{16}\right)$. ……………… 7 分

(2)因为 $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，又因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所有 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$，

因为 α 是第三象限角，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，…………… 8 分

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$，

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=-\dfrac{3}{5}$，……………………………… 10 分

$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos 2\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，…………………………… 12 分

$f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{10}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{2}{5}$.……………………………… 14 分

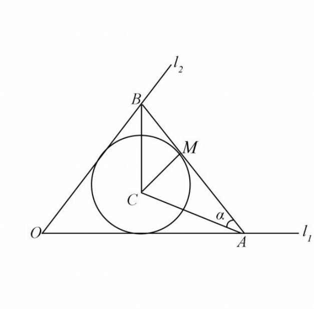
【名师点睛】三角函数的性质经常考查函数的周期，单调区间，最值问题.三角函数的运算要根据角的范围，应用同角三角函数关系式来计算值，还需考虑角之间的联系，利用两角和差，二倍角等公式进行计算，特别需要注意公式记忆的正确性.

17.**【解题探究】**本题涉及的考点有三角函数正切的和差公式，基本不等式.

(1)结合图形寻找出线段 AB 可以分解成线段 AM 和 BM 之和，而这两条线段的长可以分别在 $\mathrm{Rt}\triangle ACM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCM$ 中，通过利用 $\angle CAB=\alpha$，用 α 来表示；

(2)通过对表达式分析，可以用 $\tan\alpha$ 做为未知量，通过构造基本不等式来求解出最小值.

【解析】(1)设直线 AB 和圆 C 相切于点 M，$\angle CAB=\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $\angle CBM=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$，



$\tan\alpha=\dfrac{CM}{AM}$，$AM=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{CM}{BM}$，$BM=\dfrac{CM}{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}$，…………………………………… 2 分

$AB=AM+BM=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$；……………………………………………… 6 分

(2) $AB=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\tan\alpha)}{\sqrt{3}-\tan\alpha}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}+3\tan\alpha}{\sqrt{3}-\tan\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\alpha}+\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\tan\alpha}-3$ ………… 8 分

$=\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{4}{\sqrt{3}-\tan\alpha}\right)[\tan\alpha+(\sqrt{3}-\tan\alpha)]-3$ …… 10 分

$=2+\dfrac{\sqrt{3}-\tan\alpha}{\tan\alpha}+\dfrac{4\tan\alpha}{\sqrt{3}-\tan\alpha}$

$\geqslant 2+2\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}-\tan\alpha}{\tan\alpha}\times\dfrac{4\tan\alpha}{\sqrt{3}-\tan\alpha}}=6$（当且仅当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时等号成立）.……………………………………………… 14 分

【名师点睛】应用题的训练要注重读题、审题(有图形的要注意结合图形去理解题意)方面的训练，将文字语言通过数学的建模，转化为常见的数学问题来解决. 导数、基本不等式等解决最值的方法是应用题中常见的处理最值的方法.

18.**【解题探究】**本题涉及的考点有椭圆的基本性质和椭圆方程，直线和椭圆相交，主要考查学生的含参计算能力.

(1)由焦距和离心率来得到 a,b,c 的值；

(2)通过直线和椭圆方程联立方程组，利用韦达定理来进

行含参运算;

(3)通过含参运算来解决定值问题.

【解析】(1)因为长轴长为4,所以$a=2$,

因为$e=\frac{1}{2}$,所以$c=1,b=\sqrt{3}$,所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………… 4分

(2)设点$D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$,

由已知得直线DE的方程为$y=k(x-1)$,

$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,

由韦达定理,$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2},\end{cases}$ …………………… 6分

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2-(k^2+2)(x_1+x_2)+k^2+4$

$=(1+k^2)\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-(k^2+2)\frac{8k^2}{3+4k^2}+k^2+4=\frac{-5k^2}{3+4k^2}$,

…………………………………………………… 8分

因为$-1\leqslant\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}\leqslant-\frac{5}{7}$,所以$-1\leqslant\frac{-5k^2}{3+4k^2}\leqslant-\frac{5}{7}$,所以$-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant-1$或$1\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$. …………………… 10分

(3)设$P(x_0,y_0),M(t,m)$,则$N(t,-m)$,

则直线MP的方程为$y-y_0=\frac{y_0-m}{x_0-t}(x-x_0)$,

令$y=0$,得$x_R=\frac{ty_0-x_0m}{y_0-m}$,同理$x_S=\frac{ty_0+x_0m}{y_0+m}$, ……

…………………………………………………… 13分

故$x_R\cdot x_S=\frac{t^2y_0^2-x_0^2m^2}{y_0^2-m^2}$,②

又点P与点M在椭圆上,故$x_0^2=4\left(1-\frac{y_0^2}{3}\right)$,$t^2=4\left(1-\frac{m^2}{3}\right)$,

代入②式,得$x_R\cdot x_S=\frac{4\left(1-\frac{m^2}{3}\right)y_0^2-4\left(1-\frac{y_0^2}{3}\right)m^2}{y_0^2-m^2}=\frac{4(y_0^2-m^2)}{y_0^2-m^2}=4$,

所以$|OR|\cdot|OS|=|x_R|\cdot|x_S|=|x_R\cdot x_S|=4$为定值.

…………………………………………………… 16分

【名师点睛】求解方程时,要注意焦距,实轴长等基本概念.在考虑直线和椭圆的位置关系时,一般总是利用直线方程和椭圆方程联立方程组(注意直线的斜率不存在情况),通过设交点不求,再利用韦达定理来进行求解.求值、定性、定量问题是直线和椭圆的常见问题,掌握好其求解的通法.

19.【解题探究】本题涉及的考点有:利用导数研究函数的单调性,最值问题,构造函数利用单调性来证明不等式.

(1)利用函数的导数来求解单调区间(注意函数的定义域),含字母的要注意分类讨论;

(2)恒成立问题经常通过单调性转化成最值问题来解决;

(3)由(1)得出$0<x_1<1,x_2>1$,再由m的范围进一步压缩范围得$x_2>2$,通过构造函数$G(x)=\ln x-x-m$,由其在$(0,1)$上的单调性来比较$G(x_1),G\left(\frac{2}{x_2^2}\right)$来得出结论,在比较大小时通过构造函数$H(t)=-t+\frac{2}{t^2}+3\ln t-\ln 2(t>2)$研究单调性来得到.

【解析】(1)$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}(x>0)$,

当$a\leqslant0$时,函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$, ……

…………………………………………………… 2分

当$a>0$时,函数$f(x)$的单调递增区间为$(a,+\infty)$,单调递减区间为$(0,a)$. …………………………………… 3分

(2)对任意的$x\in[3,4]$,$f(x)\geqslant g(x)$均成立,

即为$\frac{1}{2}x^2+(1-a)x-a\ln x\geqslant0$对任意$x\in[3,4]$恒成立,

设$M(x)=\frac{1}{2}x^2+(1-a)x-a\ln x$,$3\leqslant x\leqslant4$,

$M'(x)=x+1-a-\frac{a}{x}=\frac{(x+1)(x-a)}{x}$,

当$a\leqslant3$时,$M(x)_{\min}=\frac{15}{2}-3a-a\ln3$,则$\frac{15}{2}-a(3+\ln3)\geqslant0$,$a\leqslant\frac{15}{2(3+\ln3)}<3$,$\therefore a\leqslant\frac{15}{2(3+\ln3)}$;

当$3<a<4$时,$M(x)_{\min}=-\frac{1}{2}a^2+a-a\ln a$,则$-\frac{1}{2}a^2+a-a\ln a\geqslant0$,不成立;

当$a\geqslant4$时,$M(x)_{\min}=12-4a-a\ln4$,则$12-4a-a\ln4\geqslant0$,

$a\leqslant\frac{12}{4+\ln4}$,$\because\frac{12}{4+\ln4}<4$,不成立,

综合可得,实数a的取值范围是$\left(-\infty,\frac{15}{2(3+\ln3)}\right]$. ……

…………………………………………………… 8分

(3)由(1)知,可设$f(x)+m=0(m<-2)$两个相异实根x_1,x_2且$0<x_1<1,x_2>1$,

则$\ln x_1-x_1-m=0,\ln x_2-x_2-m=0$,

且由$\ln x_2-x_2=m<-2<\ln2-2$,由$f(x)$在$(1,+\infty)$单调递增得$x_2>2$. …………………………………… 10分

令$G(x)=\ln x-x-m$,

$G(x_1)-G\left(\frac{2}{x_2^2}\right)=\ln x_1-x_1-m-\left(\ln\frac{2}{x_2^2}-\frac{2}{x_2^2}-m\right)=\ln x_2-x_2-m-\left(\ln\frac{2}{x_2^2}-\frac{2}{x_2^2}-m\right)$

$=-x_2+\frac{2}{x_2^2}+3\ln x_2-\ln 2$，

令 $H(t)=-t+\frac{2}{t^2}+3\ln t-\ln 2(t>2)$，

$H'(t)=-1-\frac{4}{t^3}+\frac{3}{t}=\frac{-t^3+3t^2-4}{t^3}=\frac{-(t+1)(t-2)^2}{t^3}$，…………………………………… 12 分

所以 $t>2$ 时 $H'(t)<0$ 恒成立，所以 $H(x)$ 为 $(2,+\infty)$ 上的单调减函数，

$H(t)<H(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}<0$，

所以 $G(x_1)-G\left(\frac{2}{x_2^2}\right)<0(x_2>2)$ 即 $G(x_1)<G\left(\frac{2}{x_2^2}\right)$，……………………………………………… 15 分

因为 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $x_1<\frac{2}{x_2^2}$ 即 $x_1x_2^2<2$.

……………………………………………… 16 分

【名师点睛】 利用导数研究函数的单调性，极值和最值是导数最常见的应用.与函数关联的不等式的证明经常会利用函数的单调性，利用函数的单调性来研究导数是导数应用的最基本方法，应仔细研究，大多数题目都是围绕这一知识点进行展开.

20.【解题探究】 本题涉及的考点有：数列的递推关系式，周期函数的定义，数列的通项公式.

(1)利用递推关系式作差（考虑数列前 n 项和和数列的项间关系 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$）；

(2)根据题中周期数列（类比周期函数）的定义，由(1)求出数列奇数项和偶数项的通项公式，通过分类讨论来求解；

(3)利用特殊的前三项成等差数列来求出数列的通项公式（一般不能直接求解等差数列时，可以考虑特殊项求解后再验证），再通过整除性举反例来说明.

【解析】(1) $\because rS_n=a_na_{n+1}-1$，$\therefore rS_{n+1}=a_{n+1}a_{n+2}-1$，

作差得 $ra_{n+1}=a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$，

$\because a_n>0$，$\therefore a_{n+2}-a_n=r$，…………………………… 3 分

即 $a_{n+2}-a_n$ 为定值 r.

(2)当 $n=1$ 时，$ra=aa_2-1$，$\therefore a_2=\frac{1+ra}{a}$，

由(1)可得，数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别成等差数列，公差都是 r，

所以 $a_{2n-1}=a+(n-1)r$，$a_{2n}=\frac{1}{a}+nr$，………… 5 分

当 $r>0$ 时，$\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项都是递增的，因而不可能是周期数列.……………………………………… 6 分

当 $r=0$ 时，$a_{2n-1}=a$，$a_{2n}=\frac{1}{a}$，此时，$a_{2n+1}=a_{2n-1}=a$ 且 $a_{2n+2}=a_{2n}=\frac{1}{a}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是周期数列，其最小周期为 2.………… 8 分

(3)因为数列 $\{a_n\}$ 是有理项等差数列，则其前三项必定成等差数列，

由 $a_1=a$，$a_2=\frac{1}{a}+r$，$a_3=a+r$ 得 $a+a+r=2\left(\frac{1}{a}+r\right)$，

整理得 $2a^2-ra-2=0$，由 $a>0$，所以 $a=\frac{r+\sqrt{r^2+16}}{4}$，

……………………………………………………… 10 分

因为 a 是有理数，所以 r^2+16 是一个正整数的完全平方数，设 $r^2+16=k^2(k\in\mathbf{N}^*)$，

当 $r=0$ 时，$a=1$（舍去），

当 $r>0$ 时，由 $r^2+16=k^2$ 可得 $(-r+k)(r+k)=16$，

$\begin{cases}k+r=16,\\k-r=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k+r=8,\\k-r=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=5,\\r=3,\end{cases}$

此时 $a=2$，$a_{2n-1}=3n-1$，$a_{2n}=\frac{1}{2}+3n$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{3n+1}{2}$，$(n\in\mathbf{N}^*)$ ……………………… 14 分

若 $c_n=2\cdot 3^{n-1}$ 均是数列 $\{a_n\}$ 中的项，

则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $c_n=a_m(m\in\mathbf{N}^*)$ 成立，即 $2\cdot 3^{n-1}=\frac{3m+1}{2}$，

整理得 $m=3^{n-1}+3^{n-2}-\frac{1}{3}$，此时 $n=2$ 时 $m=\frac{11}{3}\notin\mathbf{N}^*$，

所以 c_2 不是数列中 $\{a_n\}$ 的项.………………………… 16 分

【名师点睛】 数列的通项公式和递推关系式是给出数列的两种表示方法，要掌握有递推关系式求通项公式的基本方法.在研究数列时，不能直接得到数列的通项公式时，可以由特殊的几项来运算或归纳出数列的通项，掌握好特殊到一般这一归纳方法.

21.A.

【解题探究】 本小题主要考查二阶矩阵与平面列向量的乘法和逆矩阵，考查运算求解能力.先利用二阶矩阵与平面列向量的乘法得出 a,b 的值，再求出逆矩阵.

【解析】 设已知曲线上任意一点 (x_0,y_0) 在矩阵 $\mathbf{A}$ 变换后为点 (x',y')，

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\b&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax_0\\bx_0+y_0\end{bmatrix}$$

因为 $x'^2+y'^2=1$，所以 $(ax_0)^2+(bx_0+y_0)^2=1$，

又因为 $2x_0^2+2x_0y_0+y_0^2=1$，所以 $\begin{cases}a^2+b^2=2,\\2b=2,\end{cases}$

因为 $a>0$，所以 $\begin{cases}a=1,\\b=1,\end{cases}$ ……………………………………… 6 分

由 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\\frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$，

可得 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$. ………………………………… 10 分

B.

【解题探究】本小题主要考查极坐标方程,参数方程和普通方程的互化.

【解析】曲线 C_1 的参数方程可化为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$， …… 2 分

以极点为原点,极轴为 x 轴建立平面直角坐标系.

曲线 C_2 的极坐标方程可化为 $x+y-6=0$， ……… 4 分

联立得 $41x^2-300x+500=0$,得 $x_1=\frac{150+20\sqrt{5}}{41}$,

$x_2=\frac{150-20\sqrt{5}}{41}$, ………………………………………… 8 分

$AB=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\times\frac{40\sqrt{5}}{41}=\frac{40}{41}\sqrt{10}$. … 10 分

C.

【解题探究】本小题主要考查绝对值不等式的性质及恒成立问题,考查推理论证能力.

【解析】因为 $|x-2|-|x-a|\leqslant|(x-2)-(x-a)|=|a-2|$ 恒成立, ………………………………………… 5 分

所以要使关于 x 的不等式 $|x-2|-|x-a|<2$ 恒成立,当且仅当 $|a-2|<2$, ……………………………… 8 分

即 $0<a<4$.所以实数 a 的取值范围为 $(0,4)$. ……… 10 分

22.【解析】(1)甲、乙、丙租赁超过一小时且不超两小时的概率分别为 $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}$,设"甲、乙两人所付的费用之和等于丙所付的费用"为事件 A,$P(A)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$. ………………………………………… 3 分

(2)随机变量 ξ 的所有可能取值为 40,50,60,70,80,

$P(\xi=40)=C_2^0\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{9}{32}$,

$P(\xi=50)=C_2^1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$,

$P(\xi=60)=C_2^0\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{2}+C_2^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$,

$P(\xi=70)=C_2^1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$,

$P(\xi=80)=C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$, ……………………… 8 分

所以 ξ 的分布列为

40	50	60	70	80
$\frac{9}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

所以 $E(\xi)=40\times\frac{9}{32}+50\times\frac{3}{16}+60\times\frac{5}{16}+70\times\frac{3}{16}+80\times\frac{1}{32}=55$. …………………………………………… 10 分

23.【解】(1) $f_1(x)=C_1^0x-C_1^1(x-1)=x-x+1=1$， … 1 分

$f_2(x)=C_2^0x^2-C_2^1(x-1)^2+C_2^2(x-2)^2$

$=x^2-2(x^2-2x+1)+(x^2-4x+4)=2$； ………… 2 分

$f_3(x)=C_3^0x^3-C_3^1(x-1)^3+C_3^2(x-2)^3-C_3^3(x-3)^3$

$=x^3-3(x-1)^3+3(x-2)^3-(x-3)^3=6$. ………… 3 分

(2)猜测: $f_n(x)=n!$. ……………………………………… 4 分

而 $kC_n^k=k\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$, $nC_{n-1}^{k-1}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$,

所以 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$. ……………………………………… 5 分

用数学归纳法证明结论成立.

①当时 $n=1$ 时, $f_1(x)=1$,所以结论成立.

②假设当 $n=k$ 时,结论成立,即 $f_k(x)=C_k^0x^k-C_k^1(x-1)^k+\cdots+(-1)^kC_k^k(x-k)^k=k!$.

当 $n=k+1$ 时, $f_{k+1}(x)=C_{k+1}^0x^{k+1}-C_{k+1}^1(x-1)^{k+1}+\cdots+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}(x-k-1)^{k+1}=C_{k+1}^0x^{k+1}-C_{k+1}^1(x-1)^k(x-1)+\cdots+(-1)^kC_{k+1}^k(x-k)^k(x-k)+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}(x-k-1)^{k+1}=x[C_{k+1}^0x^k-C_{k+1}^1(x-1)^k+\cdots+(-1)^kC_{k+1}^k(x-k)^k]+[C_{k+1}^1(x-1)^k-2C_{k+1}^2(x-2)^k\cdots+(-1)^{k+1}kC_{k+1}^k(x-k)^k]+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}(x-k-1)^{k+1}=x[C_k^0x^k-(C_k^1+C_k^0)(x-1)^k+\cdots+(-1)^k(C_k^k+C_k^{k-1})(x-k)^k]+(k+1)[(x-1)^k-C_k^1(x-2)^k\cdots+(-1)^{k+1}C_k^{k-1}(x-k)^k]+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}(x-k-1)^k(x-k-1)=x[C_k^0x^k-C_k^1(x-1)^k+\cdots+(-1)^kC_k^k(x-k)^k]-x[C_k^0(x-1)^k+\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}(x-k)^k]+(k+1)[(x-1)^k-C_k^1(x-2)^k+\cdots+(-1)^{k+1}C_k^{k-1}(x-k)^k]+x(-1)^{k+1}C_k^k(x-k-1)^k-(k+1)(-1)^{k+1}(x-k-1)^k=x[C_k^0x^k-C_k^1(x-1)^k+\cdots+(-1)^kC_k^k(x-k)^k]-x[C_k^0(x-1)^k+\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}(x-k)^k-(-1)^kC_k^k(x-k-1)^k]+(k+1)[(x-1)^k-C_k^1(x-2)^k\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}(x-k)^k-(-1)^k(x-k-1)^k]$, …………………………………… (*)

由归纳假设知(*)式等于 $x\cdot k!-x\cdot k!+(k+1)\cdot k!=(k+1)!$.所以当 $n=k+1$ 时,结论也成立.

综合①②, $f_n(x)=n!$ 成立. …………………………… 10 分