济南市高三期中考试

数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集为 R, 集合 $A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leq 1\right.\right\}$，$B=\left\{x\mid x^{2}-6x+8\leq 0\right\}$，则 $A\cap C_{\mathrm{R}}B=$

A. $\{x\mid x\leq 0\}$　　B. $\{x\mid 2\leq x\leq 4\}$

C. $\{x\mid 0\leq x<2或x>4\}$　　D. $\{x\mid 0<x\leq 2或x\geq 4\}$

2. 已知 a 是实数，$\frac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 是纯虚数，则 $a=$

A. 1　　B. -1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{2}$

3. “$a=\frac{1}{8}$”是“对任意的正数 x，$2x+\frac{a}{x}\geqslant 1$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4. 将 5 名志愿者分配到 3 个不同的奥运场馆参加接待工作，每个场馆至少分配一名志愿者的方案种数为

A．540　　B．300　　C．180　　D．150

5. 设 $a=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}},b=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}},c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$

C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

6．我国古代数学著作《九章算术》有如下问题：“今有金箠，长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤．问次一尺各重几何?”意思是：“现有一根金箠，一头粗，一头细．在粗的一端截下一尺，重四斤；在细的一端截下一尺，重二斤．问依次每一尺各重几斤?”根据已知条件，若金箠由粗到细是均匀变化的，

中间三尺的重量为

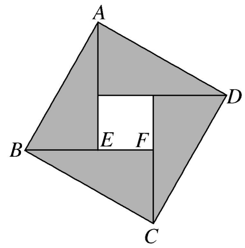
A．6 斤　　B．9 斤　　C．10 斤　　D．12 斤

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1},x\le 0,\\ \dfrac{\ln x}{x},x>0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程，$f\left(x\right)=x+a$ 无实根，则实数 a 的取值范围为

A．$\left(-\infty,0\right)\cup\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$　　B.（−1，0）

C．$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　D．（0，1）

8. 我国古代人民早在几千年以前就已经发现并应用勾股定理了，勾股定理最早的证明是东汉数学家赵爽在为《周髀算经》作注时给出的，被后人称为“赵爽弦图”．“赵爽弦图”是数形结合思想的体现，是中国古代数学的图腾，还被用作第 24 届国际数学家大会的会徽．如图，大正方形 *ABCD* 是由 4 个全等的直角三角形和中间的小正方形组成的，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，*E* 为 *BF* 的中点，则 $\overrightarrow{AE}=$



A．$\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{5}\boldsymbol{b}$　　B．$\dfrac{2}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{b}$　　C．$\dfrac{4}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　D．$\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{4}{3}\boldsymbol{b}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．已知函数 $f\left(x\right)=2\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x-1\left(\omega>0\right)$ 的最小正周期为 π，则下列说法正确的有

A．$\omega=2$

B．函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上为增函数

C．直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴

D．点 $\left(\dfrac{5}{12}\pi,0\right)$ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心

10．甲乙两个质地均匀且完全一样的四面体，每个面都是正三角形，甲四个面上分别标有数字 1，2，3，4，乙四个面上分别标有数字 5，6，7，8，同时抛掷这两个四面体一次，记事件 A 为“两个四面体朝下一面的数字之和为奇数”，事件 B 为“甲四面体朝下一面的数字为奇数”，事件 C 为“乙四面体朝下一面的数字为偶数”，则下列结论正确的是

A. $P(A)=P(B)=P(C)$　　B. $P(BC)=P(AC)=P(AB)$

C. $P(ABC)=\dfrac{1}{8}$　　D. $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\dfrac{1}{8}$

11. 设 a,b 为正实数, 下列命题正确的有

A. 若 $a^2-b^2=1$, 则 $a-b<1$;

B. 若 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=1$, 则 $a-b<1$;

C. 若 $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=1$, 则 $|a-b|<1$;

D. 若 $|a^3-b^3|=1$, 则 $|a-b|<1$.

12. 设函数 $f(x)=\min\{|x-2|,x^2,|x+2|\}$，其中 $\min\{x,y,z\}$ 表示 x,y,z 中的最小者. 下列说法正确的有

A. 函数 $f(x)$ 为偶函数

B. 当 $x\in[1,+\infty)$ 时, 有 $f(x-2)\le f(x)$

C. 当 $x\in\mathrm{R}$ 时，$f(f(x))\le f(x)$

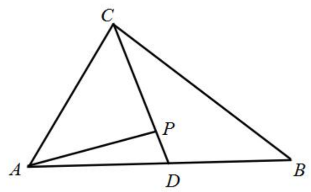
D. 当 $x\in[-4,4]$ 时，$|f(x)-2|\ge f(x)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(x^2+2\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是__________.

14. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x} & x\le 0\\ f(x-1)-f(x-2), & x>0\end{cases}$，则$f(2020)=$__________.

15. 如图，在△ABC 中，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，P 为 CD 上一点，且满足 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，若 $AC=3,AB=4$ 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值为_________.



16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧棱 $PA\perp$ 底面 ABC，$\angle BAC=120^\circ,AB=AC=1$，且 $PA=2BC$，则该三棱锥的外接球的体积为_________.

四、解答题：本题包括 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

在① $(a+b)(a-b)=(a-c)c$，② $2a-c=2b\cos C$，③ $\sqrt{3}(a-b\cos C)=c\sin B$ 三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题.

在ΔABC中，内角A,B,C的对边分别是a,b,c，且满足__________，$b=2\sqrt{3}$.

（1）若$a+c=4$，求ΔABC的面积；

（2）求$a+c$的取值范围.

18．（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n，满足$3S_n=1+2a_n$

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{(2n-1)a_n\}$的前n项和S_n.

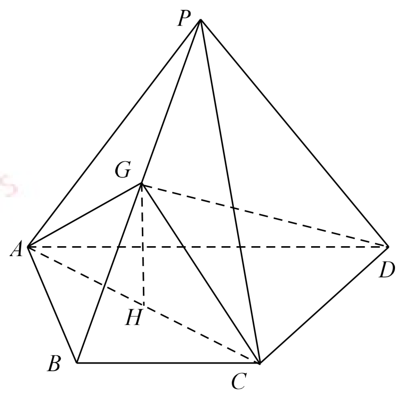
19．（12 分）

已知在四棱锥$P-ABCD$中，$AD//BC, AB=BC=CD$，$\angle ABC=120^{\circ}$，G是PB的中点，H为AC的中点，ΔPAD是等边三角形，

平面$PAD\perp$平面$ABCD$

（1）求证：$GH//平面PAD$；

（2）求二面角$D-AG-C$的余弦值.



20．（12 分）

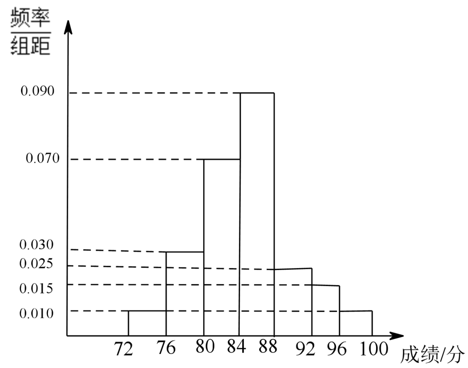
已知函数 $f(x)=2e^{x}-ax-2(x\in R,a\in R)$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）已知 $x\geq 0$ 时，不等式 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

21．（12 分）

某市质监部门严把食品质量关，在 2020 年 3 月 15 日前夕，根据质量管理考核指标对本地的 500 家食品生产企业进行考核，通过随机抽样抽取其中的 50 家，统计其考核成绩（单位：分），并制成如图频率分布直方图．



（1）求这 50 家食品生产企业考核成绩的平均数 $\bar{x}$（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）及中位数 a（精确到 0.01）

（2）该市质监部门打算举办食品生产企业质量交流会，并从这 50 家食品生产企业中随机抽取 4 家考核成绩不低于 88 分的企业发言，记抽到的企业中考核成绩在 $[92，100]$ 的企业数为 X，求 X 的分布列与数学期望

（3）若该市食品生产企业的考核成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^{2})$ 其中 μ 近似为 50 家食品生产企业考核成绩的平均数 $\bar{x},\sigma^{2}$ 近似为样本方差为 s^{2}，经计算得 $s^{2}=27.68$，利用该正态分布，估计该市 500 家食品生产企业质量管理考核成绩高于 90.06 分的有多少家？（结果保留整数）．

附参考数据与公式：$\sqrt{27.68}\approx 5.26$，$X-N(\mu,\sigma^{2})$ 则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X<2\mu+\sigma)\approx 0.9545$．$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$．

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln(x+1)}{x+1}$

（1）求函数 $y=f(x)$ 的最大值；

（2）令 $g(x)=(x+1)f(x)-(a-2)x+x^2$，若 $g(x)$ 既有极大值，又有极小值，求实数 a 的范围；

（3）求证：当 $n\in N^*$ 时，$\ln(1+1)+\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}})+\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}})+\cdots+\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})<2\sqrt{n}$.

济南市高三期中考试

数学试题答案与评分标准

选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	A	D	A	B	B	A	BD	ABD	AD	ABC

填空题

13. −25 ；　14. 4；　15. $\frac{13}{12}$；　16. $\frac{32\pi}{3}$.

三、解答题

17. 【解】若选①，由题意 $(a+b)(a-b)=(a-c)c$，化简得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，-2 分

即 $\cos B=\frac{1}{2},0<B<\pi$，得 $B=\frac{\pi}{3}$. ------------------------3 分

（1）由余弦定理 $b^2=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B$，得 $12=4^2-2ac-2ac\cdot\frac{1}{2}$，解得 $ac=\frac{4}{3}$

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ----------------------6 分

（2）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，又因为 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $a+c=4(\sin A+\sin C)$ ------------------------------8 分

$=4(\sin A+\sin(\frac{2\pi}{3}-A))=4\sqrt{3}(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)=4\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{6})$，-----------10 分

因为 $0<A<\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，$\sin(A+\frac{\pi}{6})\in(\frac{1}{2},1]$.

$a+c\in(2\sqrt{3},4]$ ---12 分

若选②，由 $2a-c=2b\cos C$，得 $2\sin A-\sin C=2\sin B\cos C$，$2\sin(B+C)-\sin C=2\sin B\cos C$，

化简得 $2\cos B\sin C=\sin C$，得 $\cos B=\frac{1}{2},0<B<\pi$，得 $B=\frac{\pi}{3}$. 以下与选①同.

若选③，由$\sqrt{3}(a-b\cos C)=c\sin B$得$\sqrt{3}(\sin A-\sin B\cos C)=\sin C\sin B$，即

$\sqrt{3}[\sin(B+C)-\sin B\cos C]=\sin C\sin B$，化简得$\tan B=\sqrt{3}$，$0<B<\pi$，得$B=\dfrac{\pi}{3}$. 以下与选①同.

18. 【解】（1）当$n=1$时，$a_1=1$,

当$n\geq 2$时，$3S_n=1+2a_n$ ①

$3S_{n-1}=1+2a_{n-1}$ ②

①−②得，$a_n=-2a_{n-1}$,

$\therefore\{a_n\}$是以1为首项,-2为公比的等比数列$\therefore a_n=(-2)^{n-1}$ ……………4 分

（2）$S_n=1\times1+3\times(-2)+\ldots+(2n-1)\times(-2)^{n-1}$

$S_n=1\times1+3\times(-2)+\ldots+(2n-1)\times(-2)^{n-1}$ ①

$-2S_n=1\times(-2)+3\times(-2)^2\ldots+(2n-1)\times(-2)^n$ ②

①−②得，$3S_n=1+2\times\left[(-2)+(-2)^2+\ldots+(-2)^{n-1}\right]-(2n-1)\times(-2)^n$

$$=1+2\times\frac{(-2)\left[1-(-2)^{n-1}\right]}{1-(-2)}-(2n-1)\times(-2)^n=-\frac{1}{3}-\frac{6n-1}{3}\times(-2)^n$$

$\therefore S_n=-\dfrac{1}{9}-\dfrac{6n-1}{9}\times(-2)^n$ ………………12 分

19. 【解】（1）证明：取AD的中点为O，连结OP,OB,OC，

因为$AD//BC,AB=BC=CD$，

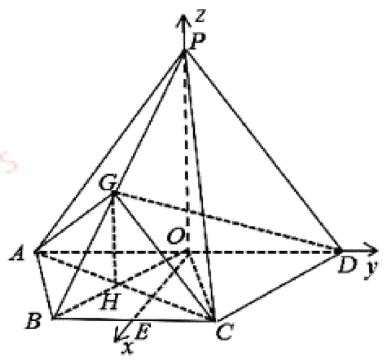
$\angle ABC=120^0$ $AB=BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$，

四边形$ABCO$与四边形$OBCD$均为菱形，

$\therefore$ H为OB中点，$GH//OP$，

$GH\not\subset$平面PAD，$OP\subset$平面PAD

$\therefore$ GH //平面PAD ………………4 分



（2）取BC的中点为E，以O为空间坐标原点，分别以$\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OP}$的方向为$x$轴、$y$轴、$z$轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$.

设 $AD=4$，则 $P\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，$A\left(0,-2,0\right)$，$C\left(\sqrt{3},1,0\right)$，$D\left(0,2,0\right)$，$G\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\right)$.

$\overrightarrow{AD}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{AG}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},\sqrt{3})$ $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},3,0)$ …………6 分，

设平面的 DAG 一法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$ 则 $\vec{n}=(2,0,-1)$. …………8 分

设平面的 CAG 一法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x+3y=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$ 则 $\vec{m}=(\sqrt{3},-1,0)$. …………10 分

$\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

$\therefore$ 二面角 $D-AG-C$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. …………12 分

20. 【解】（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=2e^{x}-x-2$，

$f'\left(x\right)=2e^{x}-1$，$f'\left(1\right)=2e-1$

即曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 出的切线的斜率为 $k=2e-1$

又 $f\left(1\right)=2e-3$，所以所求切线方程为 $y=\left(2e-1\right)x-2$ ……………………5 分

（Ⅱ）当 $x\ge0$ 时，若不等式 $f\left(x\right)\ge0$ 恒成立 $\Leftrightarrow\left[f\left(x\right)\right]_{\min}\ge0$

易知 $f'\left(x\right)=2e^{x}-a$

①若 $a\le0$，则 $f'\left(x\right)>0$ 恒成立，$f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增

又 $f\left(0\right)=0$，所以当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)\ge f\left(0\right)=0$，符合题意 ……………………7 分

②若 $a>0$，由 $f'\left(x\right)=0$，解得 $x=\ln\dfrac{a}{2}$

则当 $\ln\dfrac{a}{2}\le0$，即 $0<a\le2$ 时，

则当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)\ge0$，$f\left(x\right)$ 在 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 上单调递减

$f\left(x\right)\ge f\left(0\right)=0$，符合题意 ……………………9 分

当 $\ln\frac{a}{2}>0$，即 $a>2$ 时

则当 $x\in\left[0,\ln\frac{a}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$f(x)<f(0)=0$，不符合题意 …………11 分

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ………………12 分

21. 【解】(1) 这 50 家食品生产企业考核成绩的平均数为:

$\bar{x}=74\times0.04+78\times0.12+82\times0.28+86\times0.36+90\times0.10+94\times0.06+98\times0.04=84.80$（分），

由频率分布直方图得 $a\in[84，88]$ 内，$\therefore 0.04+0.12+0.28+0.09\times(a-84)=0.5$，

解得中位数 $a\approx84.67$ --3（分）.

（2）这 50 家食品生产企业中考核成绩不低于 88 分的企业有 $50\times(0.1+0.06+0.04)=10$ 家，

其中考核成绩在 $[92，100]$ 内的企业有 $50\times(0.06+0.04)=5$ 家，

$\therefore X$ 的可能取值为 0，1，2，3，4，---5 分

$P(X=0)=\frac{C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{42}$，$P(X=1)=\frac{C_5^1C_5^3}{C_{10}^4}=\frac{5}{21}$，$P(X=2)=\frac{C_5^2C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{10}{21}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3C_5^1}{C_{10}^4}=\frac{5}{21}$，

$P(X=4)=\frac{C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{42}$，

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

$E(X)=0\times\frac{1}{42}+1\times\frac{5}{21}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{21}+4\times\frac{1}{21}=2$. --9 分

（3）由题意得 $X\sim N(84.80,27.68)$，

$\therefore \mu+\sigma\approx84.80+5.26=90.06$，$\therefore P(X>\mu+\sigma)\approx\frac{1}{2}-\frac{0.6827}{2}\approx0.1587$，$\therefore 50\times0.1587\approx79$（家），

$\therefore$ 估计该市 500 家食品生产企业质量管理考核成绩高于 90.06 分的有 79 家. ---------------------12 分

22. 证明：(1) $f'(x)=\frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$，在 $(-1,0)$ 上，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，

函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x=0$ 时，$f(x)_{\max}=f(0)=1$. ---------------------------3 分

（2）$g(x)=(x+1)f(x)-(a-2)x+x^2=1+\ln(x+1)-(a-2)x+x^2$

$g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-(a-2)+2x=\dfrac{2x^2+(4-a)x+3-a}{x+1}$ --4 分

$g(x)$ 既有极大值，又有极小值等价于 $2x^2+(4-a)x+3-a=0$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上有两个不相等的实数根. ---5 分

即 $\begin{cases}2+(a-4)+3-a>0\\ x=\dfrac{a-4}{4}>-1\\ \Delta=(a-4)^2-8(3-a)>0\end{cases}$ 解得 $a>2\sqrt{2}$，求实数 a 的范围 $a\in(2\sqrt{2},+\infty)$ -------------------8 分

（3）由（1）得，当 $x>0$，$f(x)<1$，即 $\ln(1+x)<x$，可得 $\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}(n\in N^*)$， ----------9 分

于是 $\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{1}})<\dfrac{1}{\sqrt{1}}$，$\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，…，$\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. 于是

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{n}}<1+\frac{2}{1\times\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n-1}\times\sqrt{n}}$$

$$<1+2\left[\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\right]<1+2\left(\sqrt{n}-1\right)<2\sqrt{n}.$$ --------------------12 分