江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 3

数学 I

一．填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分．请把答案填写在答题卡相应位置．

1．集合 $A=\{1,3\}$，　$B=\{a^2+2,3\}$，若 $A\cup B=\{1,2,3\}$，则实数 a 的值为_____.

2．复数 $z=(2+i)(1-i)$，其中 i 为虚数单位,则 z 的虚部为_____.

3．从集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 中分别取两个不同的数 a,b 作为对数的底数和真数，则事件“对数值大于 2 ”的概率为_____.

4．甲、乙两个城市 2017 年夏季连续 5 天中，每天的最高气温（$^\circ C$）数据如下：

城市	每天的最高气温				
	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天
甲	28	31	27	33	31
乙	25	26	29	34	36

则这 5 天中，每天最高气温较为稳定(方差较小)的城市为_____. (填甲或乙).

5．在平行四边形 $ABCD$ 中，　$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{5}{2},0\right)$，　$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{3}{2},2\right)$，则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

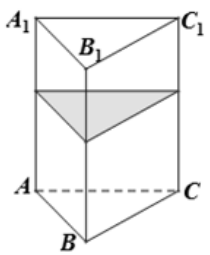
6．根据如图所示的伪代码，最后输出的 i 的值为_____.

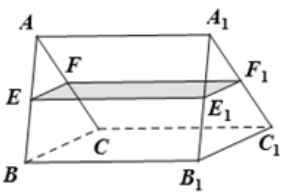
```
T←1
i←3
While T <10
    T←T +i
    i←i+2
End While
Print i
```

7．若不等式组 $\begin{cases} x\ge 0 \\ 2x+y\le 4 \\ x+2y\ge 4 \end{cases}$ 所表示的平面区域被直线 $y=kx+4$ 分为面积相等的两部分，则 k 的值为_____.

8．将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $y=f(x)$ 的图象，则 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值为_____.

9．一个封闭的正三棱柱容器，高为 3，内装水若干(如图甲，底面处于水平状态)，将容器放倒(如图乙，一个侧面处于水平状态)，这时水面与各棱交点 E，　F，　F_1，　E_1 分别为所在棱的中点，则图甲中水面的高度为_____.





10．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过原点 O 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l 与椭圆 E 相交于 A、B 两点，若△AFB 的周长为 $4+\frac{8\sqrt{13}}{13}$，则椭圆方程为_____.

11．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $O_1:x^2+y^2=9$，圆 $O_2:x^2+(y-6)^2=16$，在圆 O_2 内存在一定点 M，过 M 的直线 l 被圆 O_1，圆 O_2 截得的弦分别为 AB，CD，且 $\frac{AB}{CD}=\frac{3}{4}$，则定点 M 的坐标为_____.

12．已知点 P 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形 ABC 内切圆上的一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为_____.

13．已知 x,y,z 均为正数，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=2$，$x+2y+2z=xyz$，则 xyz 的最小值为_____.

14．数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_i=k^2$（$2^k\leqslant i<2^{k+1}$，$i\in\mathbf{N}^*$，$k\in\mathbf{N}$），则满足 $a_i+a_{2i}\geqslant 100$ 的 i 的最小值为_____.

二．解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或计算步骤．

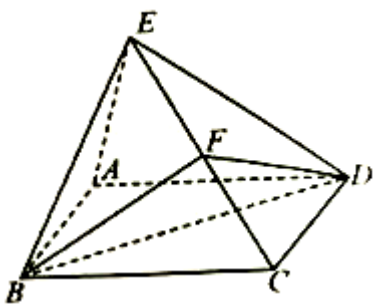
15．在 ΔABC 中，$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 若 $CD\perp AB$，垂足为 D，且 $CD=4$，求 ΔABC 面积的最小值.

16．如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，已知底面 $ABCD$ 为平行四边形，$AE\perp BC$，△ BCE 为锐角三角形，面 $AEB\perp$ 面 BCE，设 F 为 CE 的中点.

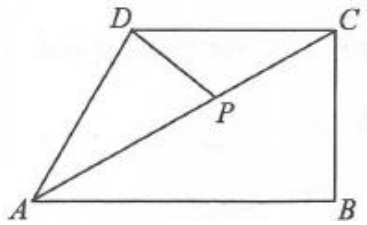
求证：(1) $AE//$ 面 BDF；(2) $AE\perp$ 面 BCE.



17. 如图，某生态农庄内有一直角梯形区域 $ABCD$，$AB \parallel CD$，$AB \perp BC$，$AB=3$ 百米，$CD=2$ 百米．该区域内原有道路 AC，现新修一条直道 DP（宽度忽略不计），点 P 在道路 AC 上（异于 A，C 两点），$\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle DPA=\theta$．

（1）用 θ 表示直道 DP 的长度；

（2）计划在△ ADP 区域内种植观赏植物，在△ CDP 区域内种植经济作物．已知种植观赏植物的成本为每平方百米 2 万元，种植经济作物的成本为每平方百米1万元，新建道路 DP 的成本为每百米1万元，求以上三项费用总和的最小值．



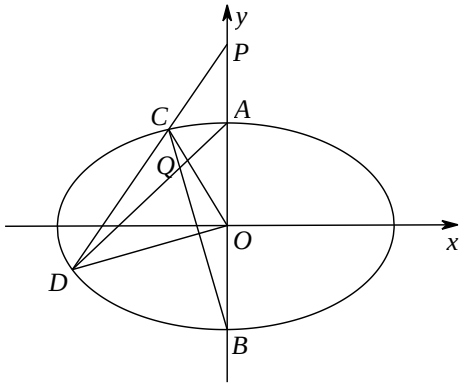
18. 椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，点 P 和 Q 关于直线 $y=-x$ 的对称点在椭圆 M 上．

(1)求椭圆 M 的方程；

(2)如图，椭圆 M 的上、下顶点分别为 A，B，过点 P 的直线 l 与椭圆 M 相交于两个不同的点 C，D．

①求 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ 的取值范围；

②当 AD 与 BC 相交于点 Q 时，试问：点 Q 的纵坐标是否是定值？若是，求出该定值；若不是，说明理由．



19．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\left(a\ln x+\dfrac{2}{x}+b\right)$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}\approx 2.71828$ 是自然对数的底数.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 的切线方程为 $y=\mathrm{e}(x-1)$，求实数 a，b 的值；

（2）①若 $a=-2$ 时，函数 $y=f(x)$ 既有极大值，又有极小值，求实数 b 的取值范围；

②若 $a=2$，$b\geq -2$，若 $f(x)\geq kx$ 对一切正实数 x 恒成立，求实数 k 的最大值(用 b 表示).

20．已知两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别满足 $a_1=1,|a_{n+1}-a_n|=2$，且 $b_1=-1,\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|=2$，其中 $n\in\mathbf{N}^{*}$，设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n.

（1）若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都为递增数列，求数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{c_n\}$ 满足：存在唯一的正整数 k（$k\geqslant 2$），使得 $c_k<c_{k-1}$，称数列 $\{c_n\}$ 为“k 坠点数列”.

①若数列 $\{a_n\}$ 为“5 坠点数列”，求 S_n；

②若数列 $\{a_n\}$ 为“p 坠点数列”，数列 $\{b_n\}$ 为“q 坠点数列”，是否存在正整数 m，使得 $S_{m+1}=T_m$，若存在，求 m 的最大值；若不存在，说明理由.

江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 3

数学 II (附加题)

21. [选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知曲线 $y^2=2x$，先将曲线 C 作关于 x 轴的反射变换，再将所得图形绕原点顺时针旋转 90°。

(1)求连续两次变换所对应的变换矩阵 M；
(2)求曲线 C 在 T_M 作用下得到的曲线 C' 的方程.

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xoy 中，已知椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数），以原点为极坐标系的极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程 $\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in R)$.设直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B，求线段 AB 的长.

23.（本小题满分 10 分）

某品牌汽车 4S 店经销 A,B,C 三种排量的汽车，其中 A,B,C 三种排量的汽车依次有 5，4，3 款不同车型．某单位计划购买 3 辆不同车型的汽车，且购买每款车型等可能．

(1)求该单位购买的 3 辆汽车均为 B 种排量汽车的概率；

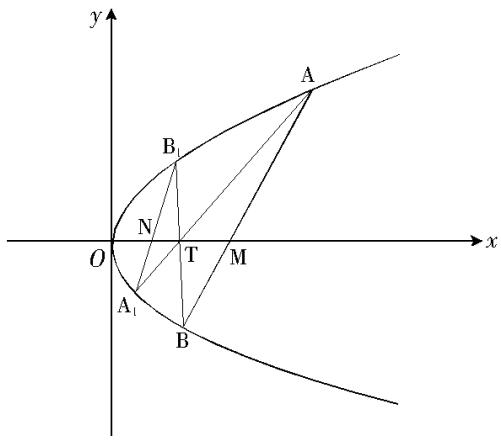
(2)记该单位购买的 3 辆汽车的排量种数为 X ，求 X 的分布列及数学期望．

24.（本小题满分 10 分）

已知直线 $l:y=2x-4$ 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 A,B 两点，$T(t,0)(t>0$ 且 $t\neq 2$ ）为 x 轴上任意一点，连接 AT,BT 并延长与抛物线 C 分别相交于 A_1,B_1 .

（1）设 A_1B_1 斜率为 k ，求证：$k\cdot t$ 为定值；

（2)设直线 AB,A_1B_1 与 x 轴分别交于 M,N ，令 $S_{\Delta ATM}=S_1,S_{\Delta BTM}=S_2,S_{\Delta B_1TN}=S_3,S_{\Delta A_1TN}=S_4$ ，若 S_1,S_2,S_3,S_4 构成等比数列，求 t 的值．



江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 3 参考答案

一．填空题：

1．0； 2．−1； 3.$\frac{2}{25}$； 4.甲； 5．5； 6．9； 7．$-\frac{7}{2}$； 8．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

9．$\frac{9}{4}$； 10．$\frac{x^2}{4}+y^2=1$； 11．$\left(0,\frac{18}{7}\right)$； 12．$-3,1$； 13．16； 14．128．

二．解答题：

15. 解：（1）由$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$，两边平方$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|^2$，

即$\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)^2=\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)^2$，得到$2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$，所以$\angle C=\frac{\pi}{2}$．

（2）在直角ΔADC中，$AC=\frac{CD}{\sin A}=\frac{4}{\sin A}$，在直角$\Delta BDC$中，$BC=\frac{CD}{\sin B}=\frac{4}{\sin B}$，

又$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A$，

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CA\cdot CB=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sin A}\cdot\frac{4}{\sin B}=\frac{8}{\sin A\cos A}=\frac{16}{\sin 2A}$，

由$A+B=\frac{\pi}{2}$得，$2A\in(0,\pi)$，故$\sin 2A\in(0,1]$，

当且仅当$A=\frac{\pi}{4}$时，$(\sin 2A)_{\max}=1$，从而$\left(S_{\Delta ABC}\right)_{\min}=16$．

16. （1）证明：连接AC交BD于O，连接OF．

在平行四边形$ABCD$中，对角线AC交BD于O，

则O为AC的中点，又已知F为BD的中点，所以OF为ΔAEC的中位线，

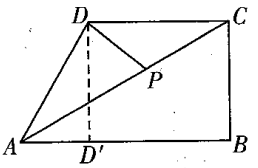
所以$AE\ //\ OF$，又$OF\subset$平面BDF，$AE\not\subset$平面BDF，

所以$AE\ //$平面BDF．

(2)过C作BE的垂线，垂足为M，即$CM\perp BE$；因为三角形BCE为锐角三角形，所以CM与CB不重合，因为，平面$AEB\perp$平面BCE，平面$AEB\cap$平面$BCE=BE$，且$CM\perp BE$，$CM\subset$平面BCE，所以，$CM\perp$平面AEB，又$AE\subset$平面AEB，所以$CM\perp AE$，又已知$AE\perp BC$，$BC\cap CM=C$，$BC,CM\subset$平面BCE，

所以$AE\perp$平面BCE。

17. 解:(1)如图,过点 D 作 DD' 垂直线段 AB,垂足为 D'.



在 $\triangle ABC$ 中,因为 $AB \perp BC$, $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$, $AB = 3$,所以 $BC = \sqrt{3}$.

因为 $DD' \perp AB$, $AB \perp BC$, $AB // CD$,所以四边形 $BCDD'$ 是矩形,所以 $BD' = CD = 2$, $DD' = BC = \sqrt{3}$.

在 Rt$\triangle ADD'$ 中, $AD' = 1$, $DD' = \sqrt{3}$,所以 $AD = 2$,则 $\sin \angle DAD' = \frac{\sqrt{3}}{2}$,故 $\angle DAD' = \frac{\pi}{3}$.

又 $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$,所以 $\angle DAP = \frac{\pi}{6}$.

在 $\triangle ADP$ 中,由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin\theta} = \frac{DP}{\sin\frac{\pi}{6}}$,

所以 $DP = \frac{1}{\sin\theta}$. 又点 P 在道路 AC 上(异于 A, C 两点),所以 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$,

所以 $DP = \frac{1}{\sin\theta}(\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6})$.

(2)在 $\triangle ADP$ 中,由正弦定理得 $\frac{AP}{\sin\angle ADP} = \frac{AD}{\sin\theta}$,

所以 $AP = \frac{2\sin\angle ADP}{\sin\theta} = \frac{2\sin(\frac{5\pi}{6} - \theta)}{\sin\theta}$,

所以 $S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} AP \cdot PD \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin(\frac{5\pi}{6} - \theta)}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta} \cdot \sin\theta = \frac{\sin(\frac{5\pi}{6} - \theta)}{\sin\theta}, \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$.

又 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin\angle ADC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle DPC} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle APD} = \sqrt{3} - \frac{\sin(\frac{5\pi}{6} - \theta)}{\sin\theta}, \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$.

设所求的三项成本的总和为 $f(\theta)$,

则 $f(\theta) = \frac{\sin(\frac{5\pi}{6} - \theta)}{\sin\theta} \times 2 + (\sqrt{3} - \frac{\sin(\frac{5\pi}{6} - \theta)}{\sin\theta}) \times 1 + \frac{1}{\sin\theta} \times 1$

$= \sqrt{3} + \frac{\sin(\frac{5\pi}{6} - \theta) + 1}{\sin\theta}$

$= \frac{\frac{1}{2}\cos\theta + 1}{\sin\theta} + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$,

所以 $f'(\theta) = \frac{-\frac{1}{2} - \cos\theta}{\sin^2\theta}$,令 $f'(\theta) = 0$,则 $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

当 θ 变化时, $f(\theta)$ 与 $f'(\theta)$ 的变化情况如表所示:

θ	$(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$
$f'(\theta)$	−	0	+
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

所以当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(\theta)_{min} = 2\sqrt{3}$.

故所求的三项成本的总和的最小值为 $2\sqrt{3}$ 万元.

18. （1）因为点 $P(0,2)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $(-2,0)$，且 $(-2,0)$ 在椭圆 M 上，所以 $a=2$．又 $2c=2\sqrt{3}$，故 $c=\sqrt{3}$，则 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$．所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）①当直线 l 的斜率不存在时，$C(0,1),D(0,-1)$，所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=-1$．当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+2,C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，$\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$，由 $\Delta>0$，可得 $4k^2>3$，且 $x_1+x_2=-\frac{16k}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$，所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=x_1x_2+y_1y_2$

$=(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=-1+\frac{17}{1+4k^2}$，所以 $-1<\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}<\frac{13}{4}$，综上 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\in[-1,\frac{13}{4})$．

②由题意得，AD：$y=\frac{y_2-1}{x_2}x+1$，BC：$y=\frac{y_1+1}{x_1}x-1$，联立方程组，消去 x 得 $y=\frac{2kx_1x_2+x_1+3x_2}{3x_2-x_1}$，又 $4kx_1x_2=-3(x_1+x_2)$，解得 $y=-\frac{1}{2}$，故点 Q 的纵坐标为定值 $\frac{1}{2}$．

19. (1) 由题意知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(1,0)$，且 $f'(1)=\mathrm{e}$；又因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x\left(a\ln x-\frac{2}{x^2}+\frac{a+2}{x}+b\right)$，则有 $\begin{cases}f(1)=\mathrm{e}(2+b)=0,\\ f'(1)=\mathrm{e}(a+b)=\mathrm{e},\end{cases}$ 解得 $a=3,b=-2$．　(2) ①当 $a=-2$ 时，函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\mathrm{e}^x\left(-2\ln x-\frac{2}{x^2}+b\right)=0$，若 $f(x)=0$ 时，得 $b=2\ln x+\frac{2}{x^2}$，设 $g(x)=2\ln x+\frac{2}{x^2}\ (x>0)$．

由 $g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}=\frac{2x^2-4}{x^3}=0$，得 $x=\sqrt{2}$，$g(\sqrt{2})=1+\ln 2$．　当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$g'(x)<0$，函数 $y=g(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{2})$ 上为减函数，$g(x)\in(1+\ln 2,+\infty)$；当 $x>\sqrt{2}$ 时，$g'(x)>0$，函数 $y=g(x)$ 在区间 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上为增函数，$g(x)\in(1+\ln 2,+\infty)$；所以，当且仅当 $b>1+\ln 2$ 时，$b=g(x)$ 有两个不同的解，设为 x_1，$x_2\ (x_1<x_2)$．

x	$(0,\ x_1)$	x_1	$(x_1,\ x_2)$	x_2	$(x_2,\ +\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极大值	↗	极小值	↘

此时，函数 $y=f(x)$ 既有极大值，又有极小值.

②由题意 $\mathrm{e}^x\left(a\ln x+\frac{2}{x}+b\right)\geq kx$ 对一切正实数 x 恒成立，取 $x=1$ 得 $k\leq(2+b)\mathrm{e}$．下证 $\mathrm{e}^x\left(a\ln x+\frac{2}{x}+b\right)\geq(2+b)\mathrm{e}x$ 对一切正实数 x 恒成立. 首先，证明 $\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}x$．设函数 $u(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$，则 $u'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，当 $x>1$ 时，$u'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$u'(x)<0$；得 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x\geqslant u(1)=0$，即 $\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}x$，

当且仅当都在$x=1$处取到等号. 再证$\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 1$. 设$v(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，则$v'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，当$x>1$时，$v'(x)>0$；当$x<1$时，$v'(x)<0$；得$v(x)\geqslant v(1)=0$，即$\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 1$，当且仅当都在$x=1$处取到等号. 由上可得$\mathrm{e}^x\left(a\ln x+\frac{2}{x}+b\right)\geq(2+b)\mathrm{e}\,x$，所以$\left(\frac{f(x)}{x}\right)_{\min}=(2+b)\mathrm{e}$，即实数$k$的最大值为$(2+b)\mathrm{e}$.

20. 解（1）数列$\{a_n\},\{b_n\}$都为递增数列，$\therefore a_{n+1}-a_n=2$，$b_2=-2b_1, b_{n+2}=2b_{n+1}, n\in N^*$，

$\therefore a_n=2n-1$，

$$b_n=\begin{cases}-1 & n=1,\\ 2^{n-1} & n\geqslant 2.\end{cases}$$

（2）①∵数列$\{a_n\}$满足：存在唯一的正整数$k=5$，使得$a_k<a_{k-1}$，且$|a_{n+1}-a_n|=2$，

∴数列$\{a_n\}$必为$1,3,5,7,5,7,9,11,\cdots$，即前 4 项为首项为 1，公差为 2 的等差数列，从第 5 项开始为首项 5，公差为 2 的等差数列，

故$S_n=\begin{cases}n^2, n\leqslant 4,\\ n^2-4n+15, n\geqslant 5.\end{cases}$

② ∵$b_{n+1}^2=4b_n^{\,2}$，即$b_{n+1}=\pm 2b_n$，$\therefore|b_n|=2^{n-1}$.

而数列$\{b_n\}$为“q坠点数列”且$b_1=-1$，∴数列$\{b_n\}$中有且只有两个负项.

假设存在正整数m，使得$S_{m+1}=T_m$，显然$m\neq 1$，且T_m为奇数，而$\{a_n\}$中各项均为奇数，

∴m必为偶数.

$S_{m+1}\leq 1+3+\cdots+(2m+1)=(m+1)^2$

i. 当$q>m$时，$T_m=-1+2^1+\cdots+2^{m-2}+2^{m-1}=2^m-3$

当$m\geqslant 6$时，$2^m-3>(m+1)^2$，故不存在m，使得$S_{m+1}=T_m$成立.

ii. 当$q=m$时，$T_m=-1+2^1+\cdots+2^{m-2}-2^{m-1}=-3<0$，

显然不存在m，使得$S_{m+1}=T_m$成立.

iii. 当$q<m$时，$T_m\geqslant -1+2^1+\cdots+\left(+2^{m-3}\right)+\left(-2^{m-2}\right)+2^{m-1}=2^{m-1}-3$，

当$2^{m-1}-3\leqslant(m+1)^2$时，才存在$m$，使得$S_{m+1}=T_m$成立，所以$m\leqslant 6$.

当$m=6$时，$q<6$，构造：$\{a_n\}$为$1,3,1,3,5,7,9,\cdots$，$\{b_n\}$为$-1,2,4,8,-16,32,\cdots$

此时$p=3$，$q=5$，所以m的最大值为6.

2019 届高三下学期数学周末限时训练 3 参考答案（附加题）

21. 解：（1）由题意，反射变换对应的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，

旋转变换对应的矩阵为 $B=\begin{bmatrix}\cos\left(-90^\circ\right) & -\sin\left(-90^\circ\right)\\ \sin\left(-90^\circ\right) & \cos\left(-90^\circ\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

（2）在曲线 C 上任取一点 (x,y)，在 T_M 作用下对应点为 (x',y')，即

$\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ -x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$，则 $\begin{cases}x'=-y\\ y'=-x\end{cases}$，又 $y^2=2x$，所以 $x'^2=-2y'$

即曲线 C' 的方程为： $x^2=-2y$.

22.解：圆 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}\end{cases}$ 变形为 $\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \dfrac{y}{4}=\dfrac{t}{1+t^2}\end{cases}$,两式平方后相加可得椭圆 C 的普通方程，再

与直线 l 的普通方程 $y=x$ 联立可得 A,B 点的坐标，利用两点间距离公式可得线段 AB 的长.

试题解析：由已知，椭圆 C 的普通方程为： $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ ， 直线 l 的普通方程为： $y=x$，

联立 $\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=x\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ y=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ ；所以 $AB=\sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

23.解:(1)设该单位购买的 3 辆汽车均为 B 种排量汽车为事件 M ，则 $P(M)=\dfrac{C_4^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{55}$.

所以该单位购买的 3 辆汽车均为 B 种排量汽车的概率为 $\dfrac{1}{55}$. ……4 分

(2)随机变量 X 的所有可能取值为 1，2，3.

则 $P(X=1)=\dfrac{C_5^3+C_4^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\dfrac{3}{44}$, $P(X=3)=\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^1}{C_{12}^3}=\dfrac{3}{11}$,

$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)=\dfrac{29}{44}$.

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{3}{11}$

……8 分

数学期望 $E(X)=1\times\frac{3}{44}+2\times\frac{29}{44}+3\times\frac{3}{11}=\frac{97}{44}$. ……10 分

24. 解：（1）$\begin{cases}y=2x-4\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow A(4,4)$， $B(1,-2)$，设 $A_1(\frac{m^2}{4},m)$，$B_1(\frac{n^2}{4},n)$，

$$k_{AT}=k_{A_1T}\Rightarrow\frac{4}{4-t}=\frac{m}{\frac{m^2}{4}-t}\Rightarrow m^2-4t=4m-tm\Rightarrow m(m-4)=t(4-m)$$

$\Rightarrow m=-t\Rightarrow A_1(\frac{t^2}{4},-t)$，同理：$B_1(t^2,2t)\Rightarrow k=\frac{3t}{t^2-\frac{t^2}{4}}=\frac{4}{t}\Rightarrow kt=4$定值.…5 分

（2）A_1B_1：$y-2t=\frac{4}{t}(x-t^2)$, 令$y=0$得$N(\frac{t^2}{2},0)$, 而$M(2,0)$

$$\frac{S_1}{S_2}=\left|\frac{y_A}{y_B}\right|=2\Rightarrow S_2=\frac{1}{2}S_1,\quad \frac{S_4}{S_1}=\left|\frac{TN\cdot y_{A_1}}{TM\cdot y_A}\right|=\left|\frac{\frac{t^2}{2}-t}{t-2}\cdot\frac{t}{4}\right|=\frac{t^2}{8}\Rightarrow S_4=\frac{t^2}{8}S_1$$

$$\frac{S_3}{S_1}=\left|\frac{TN\cdot y_{B_1}}{TM\cdot y_A}\right|=\left|\frac{\frac{t}{2}(t-2)}{t-2}\cdot\frac{2t}{4}\right|=\frac{t^2}{4}\Rightarrow S_3=\frac{t^2}{4}S_1$$

S_1,S_2,S_3,S_4 构成的等比数列，$\therefore t^2=1$ 而 $t>0\Rightarrow t=1$. ……10 分