



高考趣味逻辑型试题的几种常用解法*

◎内江师范学院数学与信息科学学院 李雪梅 赵思林

逻辑学是一门思维科学,它的研究对象是人的思维形式及规律.逻辑作为一门学科,主要有三个分支:形式逻辑、数理逻辑和辩证逻辑.趣味逻辑是一种形式逻辑,它从概念、命题、推理、逻辑基本规律等方面,通过通俗而有趣的故事介绍逻辑基本知识及其应用,展现逻辑的魅力.^[1]逻辑可以培养学生的创新意识,展现逻辑魅力,提高学生学习逻辑的兴趣,帮助学生打开逻辑知识的宝库,锤炼学生驾驭逻辑工具的能力.^[2]笔者曾看过《趣味逻辑》,它给人的感觉和印象是推理有趣、推理好玩,推理过程的思维量大、思维品质要求高但几乎不需要算,趣味逻辑问题涉及到的推理一般具有趣味性、逻辑性、思考性、挑战性和智慧性等特点.趣味逻辑推理深含数学文化意蕴.逻辑推理作为数学的核心素养,其思维方法、推理方法是学生终身受益的数学核心知识和核心素养,应予重视.^[3]古今中外,在历史上流传着一些有趣的关于逻辑的故事,如祖冲之论月食,居里夫妇发现镭元素,理发师的告示等.涉及趣味逻辑的试题,要求考生具有一定的数学视野,能让考生认识数学在社会历史发展中的独特地位,体会科学的科学价值和人文价值,崇尚数学的理性精神,感受数学逻辑的魅力.

趣味逻辑型试题是教育部考试中心近年来开发的一种新的创新型试题,其特点是新颖有趣,多想少算,突出了数学的思辨性、逻辑性和创新性.近年来的考试比较重视对趣味逻辑的考查.趣味逻辑型试题是考查学生创新意识的好题型,但它在教材中并未出现过,加之这方面研究文献很少,且解题思路灵活多变,使师生难以应对.本文总结了这类试题的几种常用解题方法:图表法、反证法、排除法、字母法、分析法及其他方法,并结合典型试题(问题)作了分析与评价.

一、图表法

图表法可分为两种:一种是列表法;另一种是画图

法.当题干中所涉及或所列出的事物情况包含的元素比较多,且这些元素之间又存在相互关系时,则可采用图表的方法,从而快速找出答案.其中,列表法就是将题干中叙述关系用表格表示,理清元素之间的关系,从而得到答案的方法,画图法就是当题目中涉及的主要元素超过两类,表格已经不能够表示清楚时,或者涉及位置关系时,便可通过画图的方式来理清关系.

例1 (2014年全国新课标I卷文理)甲、乙、丙三位同学被问到是否去过A,B,C三个城市时,甲说:我去过的城市比乙多,但没去过B城市;乙说:我没去过C城市;丙说:我们三人去过同一个城市.由此可判断乙去过的城市为_____.

解析:将甲、乙、丙三位同学是否去过A,B,C三个城市的情况用表格表示出来,如下表所示:

	$\square A$	$\square B$	$\square C$
甲	√	×	
乙	√		×
丙	√		

观察表格,可以明确地判断乙去过的城市为A.

点评:本题设计具有趣味性、新颖性和创新性,命题思路新颖别致、深含意蕴.本题要求学生多“思”.这里的“思”是指逻辑思维、逆向思维,具体是逻辑推理、反证法等.本题是一道能有效考查探究意识、创新意识和思维能力的优秀题目,也是一道考查数学核心素养十分难得的好题.此类问题的一般解法是用类似于列命题真值表的表格,把甲、乙、丙去过的三个城市A,B,C的情况全部列在一个表中,然后考察每种情况是否会产生矛盾,最后获得正确结论.选A.

例2 伯诚、仲诚、叔诚、季诚是4兄弟.他们每人都有一个儿子和女儿,为了增进孩子们的感情,他们决定让自己的孩子到其他家庭里度假,假期长三个月,孩子们每过一个月换一家,并且亲兄弟不能在同一家生活,

*项目来源:教育部“本科教学工程”四川省地方属高校本科专业综合改革试点项目——内江师范学院数学与应用数学“专业综合改革试点”项目(ZG0464);四川省“西部卓越中学数学教师协同培养计划”项目(ZY16001),内江师范学院2016年度校级学科建设特色培育项目(T160009,T160010,T160011).赵思林系本文通讯作者.

所以每一个月中,每一家都有接待一对男孩女孩,并且只能是堂兄妹,不是亲兄妹.已知:第一个月中季诚的儿子在叔诚家;叔诚的女儿第二个月在季诚家;第三个月仲诚的儿子在季诚家,而季诚的女儿在伯诚家.请问:第一个月内,其余的男孩都在谁家度假?

解析:本题涉及的人物较多,且人物的关系也比较复杂,运用表格可简化人物关系,达到化繁为简的效果.因此,根据已知条件并推理可得到如下表格.

时间	伯诚家	仲诚家	叔诚家	季诚家
第一个月	仲诚子	伯诚子	季诚子	叔诚子
第一个月	叔诚女	季诚女	伯诚女	仲诚女
第二个月	季诚子	叔诚子	仲诚子	伯诚子
第二个月	仲诚女	伯诚女	季诚女	叔诚女
第三个月	叔诚子	季诚子	伯诚子	仲诚子
第三个月	季诚女	叔诚女	仲诚女	伯诚女

从而,得到结论:第一个月内,季诚的儿子在叔诚家,仲诚的儿子在伯诚家,叔诚的儿子在季诚家,伯诚的儿子在仲诚家.

点评:本题属于趣味逻辑推理问题,问题的解答需要考生具备一定的逻辑推理能力,即数学核心素养.本题涉及的人物及其关系均比较复杂,借助表格可以理清人物关系,使问题的解答变得直观、简单.

二、反证法

反证法,又称归谬法,它是“间接证明法”的一类,是从反面的角度证明的方法.反证法首先要假设某命题的结论不成立,然后推出明显矛盾的结果,从而下结论说原假设不成立,原命题得证.法国数学家阿达玛对反证法的实质作过概括:“若肯定定理的假设而否定其结论,就会导致矛盾.”

例3 (2014年北京卷理)学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级,依次为“优秀”“合格”“不合格”.若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙,且其中至少有一门成绩高于乙,则称“学生甲比学生乙成绩好”.如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好,并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生,那么这组学生最多有().

A.2人 B.3人 C.4人 D.5人

解析:首先要证明:没有任意两个同学的数学成绩是相同的.假设A,B两个同学的数学成绩一样,由题知他们的语文成绩不一样,这样他们的语文成绩总有一个人比另一个人高,相应地,由题可知,语文成绩较高的同学

比另一个“成绩好”,与已知条件“他们之中没有一个比另一个成绩好”相矛盾.因此得出,没有任意两个同学的数学成绩是相同的.因为数学成绩等级只有3种,因而同学数量最大为3.之后要验证3个同学能否满足条件.易证3位同学的成绩等级分别为(优秀,不合格)、(合格,合格)、(不合格,优秀)时满足条件.因此满足条件的最多人数是3.故选B.

点评:本题具有较强的逻辑性和趣味性,重点考查逻辑推理与逻辑方法(反证法).题目以学生熟悉的语文、数学成绩为背景,使考生在读题和理解题意方面不存在障碍,从而考生可以集中精力并专注地考虑选择什么逻辑方法进行逻辑推理,最后获得正确的结论.本题的解答若采用反证法,则容易发现从假设出发推出的结论与已知条件产生矛盾,从而使问题获解.

例4 某届足球世界杯赛上,有法国、阿根廷、英格兰、西班牙、德国、意大利六国球队参赛,甲、乙、丙三位球迷对比赛结果做了预测,甲球迷说:“冠军队不是英格兰队.”乙说:“冠军不是法国就是阿根廷.”丙说:“我认为西班牙、法国、意大利不可能为冠军.”最后只有一个球迷预测对了,你知道谁是冠军队吗?

解析:根据已知条件,甲球迷说:“冠军队不是英格兰队.”假设甲是对的,那么“冠军不是英格兰队”就是对的,根据已知条件乙说:“冠军不是法国就是阿根廷.”也预测英格兰队不是冠军,这样就有两个球迷预测对了,与已知条件矛盾,于是假设甲是对的的不成立,从而甲预测错了,于是推出冠军队是英格兰队,进而可推出乙的预测是错的,根据已知条件丙说:“我认为西班牙、法国、意大利不可能为冠军.”这个预测没有排除英格兰队是冠军,所以丙的预测是对的.故冠军队是英格兰队.

点评:本题以学生喜欢的足球世界杯赛为情境,题目的设计新颖别致,并具有趣味性和逻辑性.本题采用反证法,可以快速找到答案.

三、排除法

排除法是利用选择支错误,或题干与选择支逻辑不相符,将错误答案排除而得出正确答案的方法,其常适用于解选择题或选择性填空题,通过“排除法”确定正确答案选项往往比直接确定正确选项要容易.

例5 (2016年北京卷理)袋中装有偶数个球,其中红球、黑球各占一半,甲、乙、丙是三个空盒,每次从袋中任意取出两个球,将其中一个球放入甲盒,如果这个球是红球,就将另一个球放入乙盒,否则就放入丙盒.重复上述过程,直到袋中所有球都被放入盒中,则().

A.乙盒中黑球不多于丙盒中黑球

- B.乙盒中红球与丙盒中黑球一样多
C.乙盒中红球不多于丙盒中红球
D.乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

解析:因为题中没有限定袋内球的具体个数,所以不妨设袋内红球、黑球各有1个,当取出红球放入甲盒时,黑球放入乙盒,此时丙盒内没有球,排除A、D;当袋内红球、黑球各有2个时,设第一次取出的两个球都为红色,第二次取出的两个球都为黑色,则此时乙盒内有一个红球,没有黑球,丙盒内有一个黑球,没有红球,排除C.故选B.

点评:本题属于趣味逻辑推理问题,考查了学生的逻辑分析能力.“不妨设袋内红球、黑球各有1个”对简化问题的解答过程至关重要.此外,“不妨设袋内红球、黑球各有1个”这实质上用了特殊化法,这也是解选择题和填空题常用的思维策略.

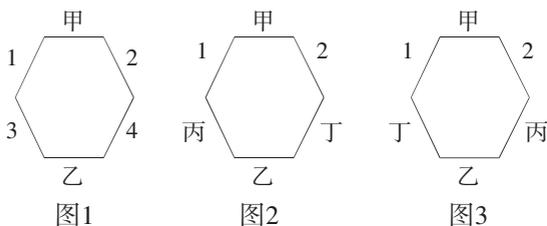
例6 (2015年考研管理类联考)甲、乙、丙、丁、戊和己等6人围坐在一张正六边形的小桌前,每边各坐一人.已知:(1)甲与乙正面相对;(2)丙与丁不相邻,也不正面相对.如果己与乙不相邻,则以下正确的选项是().

- A.如果甲与戊相邻,则丁与己正面相对
B.甲与丁相邻
C.戊与己相邻
D.如果丙与戊不相邻,则丙与己相邻
E.己与乙正面相对

解析:根据题意可得到图1,因此,丙和丁的坐次只可能是1和2,3和4,4和3,2和1,由己与丙不相邻可知,己只能在1或2,故丙和丁只能为3和4,4和3,如图2和图3,由此可排除B、C、E三项.

对于A项,若甲与戊相邻,则己与丁可能正面相对,也可能不正面相对,排除A.

对于D项,若丙与戊不相邻,则戊只能在丙的对面,则己与丙相邻,正确.



点评:本题属于趣味逻辑推理问题,受到社会广泛赞誉.本题主要考查逻辑推理能力、直观想象能力、分析问题和解决问题能力,也考查了分类讨论思想,而逻辑推理、直观想象、分析问题和解决问题能力,以及分类讨论思想等,也正是数学的核心素养.本题若不画出图形,并借助于图形直观,则较难解答.因此,可以认为本题是

对数学核心素养的考查.

四、字母法

用字母去思考、分析、探究并解决问题是数学的基本方法.在数学里,通常采用数学符号、数学式子、程序、图形等去描述或刻划实际问题的本质属性.

例7 (2016年全国新课标II卷文)有三张卡片,分别写有1和2,1和3,2和3.甲、乙、丙三人各取走一张卡片,甲看了乙的卡片后说:“我与乙的卡片上相同的数字不是2”,乙看了丙的卡片后说:“我与丙的卡片上相同的数字不是1”,丙说:“我的卡片上的数字之和不是5”,则甲的卡片上的数字是_____.

解析:将写有1和2,1和3,2和3的卡片分别记为A, B, C,由甲的话可知甲、乙两人的卡片不能是A和C卡片,则甲、乙可能取A和B或B和C,由丙的话可知丙取的不是C卡片,则甲、乙只能取B和C,丙取A卡片,又由乙的话可知乙取C卡片,则甲取B卡片,即甲取的卡片上的数字是1和3.

点评:本题属于趣味推理问题.上述解析中“将写有1和2,1和3,2和3的卡片分别记为A, B, C”,就是把3张卡片分别记为A, B, C,这里采用了字母法,可以简化问题思维和解答的过程.

例8 (2017年全国新课标II卷)甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩.老师说:你们四人中有2位优秀,2位良好,我现在给甲看乙、丙的成绩,给乙看丙的成绩,给丁看甲的成绩.看后甲对大家说:我还是不知道我的成绩.根据以上信息,则().

- A.乙可以知道四人的成绩
B.丁可以知道四人的成绩
C.乙、丁可以知道对方的成绩
D.乙、丁可以知道自己的成绩

解析:为了便于推理,将老师给甲、乙、丁看的成绩列为表格如下.

甲	乙	丁
乙、丙成绩	丙成绩	甲成绩

记成绩优秀为A,良好为B,则甲、乙、丙、丁四人的成绩为两个A,两个B.

若甲看到的成绩为AA或BB,则甲可知自己成绩为B或A,而由题意,甲不知道自己的成绩,因此,甲看到的乙、丙成绩为一个A一个B,此时乙看到丙的成绩为B(或A),便可知道自己的成绩为A(或B),无法判断甲、丁的成绩;甲、丁二人的成绩也必为一个A一个B,但甲无法判断自己的成绩,而丁可以通过看甲的成绩判断出自己

的成绩,但无法判断乙、丙的成绩.故选D.

点评:本题设计具有趣味性、新颖性和创新性,命题思路新颖别致、深含逻辑思维意蕴.解答本题的关键是用了字母法和表格法,而字母法和表格法的作用是简化问题中的逻辑关系,优化思维过程.本题是一道考查逻辑思维能力和创新意识的好题目.

五、分析法

在不等式证明中,分析法是指从要证明的结论出发,每一步都去寻找使结论(或中间结论)成立的充分条件,直到归结为一个显然成立的事实(如已知条件、定义、真命题等)为止,从而证明论题的正确性、合理性的论证方法.广义的分析法是指从结论出发去找条件(或从未知找需知,最终找到已知)的思维过程.分析法是解答趣味推理问题的常用方法之一.

例9 年终时,公司要评选出5名优秀员工来进行奖励,A、B、C、D、E得了前5名.总经理对他们说:“祝贺你们当选,现在请你们猜一猜,你们的名次是怎么排列的?”A说:“B是第三,C是第五.”B说:“D是第二,E是第四.”C说:“A是第一,E是第四.”D说:“C是第一,B是第二.”E说:“D是第二,A是第三.”总经理笑着说:“你们每个人都猜对了一半.”听他这句话,员工们就把名次弄明白了.请你想一想,前5名的顺序是怎样排列的呢?

解析:根据已知条件知,5人中只有一人猜C是第五名,推出C是第五名时,B是第三名错;根据推测D说:“C是第一,B是第二”及C是第五名,推出C是第一错,B是第二对;根据B说:“D是第二,E是第四”及B是第二,推出D是第二错,E是第四对;根据E说:“D是第二,A是第三”及B是第二,推出D是第二错,A是第三对;最后推出余下的D是第一名.

综上,前5名的顺序是:D——第一名;B——第二名;A——第三名;E——第四名;C——第五名.

点评:解答本题的关键在于根据已知条件推出C是第五名,其他员工的名次只需根据每人的预测推理即可得到.

六、其他方法

求解趣味逻辑型问题,除了采用前面提到的图表法、反证法、排除法、字母法、分析法等方法,还可以采用其他方法求解,如:交点法、演绎推理法、特殊值法、映射

法等.下面主要针对交点法和演绎推理法给出相关试题及其解析和点评.

例10 大客车在沪宁高速公路上行驶4h可从南京抵达上海.已知每隔半小时有一辆大客车从南京开往上海,同时也有一辆大客车从上海开往南京.一名旅客乘车从南京到上海,那么,他在整个旅行过程中可以遇到从上海开往南京的大客车多少辆?(包括在南京车站遇到的进站车辆、上海车站遇到的出站车辆)

解析:此题只需画出示意图(如图4),问题就迎刃而解了.

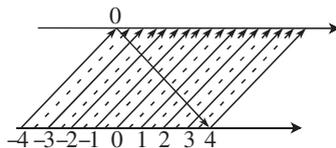


图4

该旅客前2h内(即行驶了一半路程)遇到8辆(含到达南京站的1辆),出发后2h正好遇到同时出发的上海开往南京的车1辆,接下来2h内又遇到8辆(含出上海站的1辆),总计17辆,正如图4中的交点数.

点评:本题是关于运动的趣味应用题.求解本题的关键在于画出示意图,进而数图中的交点数即可求解,对学生的思维能力、逻辑推理能力都有很高的要求.

以上趣味逻辑型试题,立意鲜明、背景深刻、情境新颖、构思巧妙,能有效考查学生的思维能力、逻辑推理能力和创新意识.在数学教学中,适当插入一些趣味逻辑的数学题目,可以扩大学生的数学视野,增加学生对数学学习的兴趣,从而让学生真正地感受到数学趣味逻辑的魅力.

参考文献:

- 徐德清.趣味逻辑[M].济南:山东人民出版社,2014.
- 赵思林,李雪梅.高考数学创新型试题的若干类型与点评[J].内江师范学院学报,2018(2).
- 崔静静,赵思林.高考数学文化型试题点评[J].理科考试研究,2018(1). 