

探究性学习培养学生的数学核心素养 ——以一道解三角形的问题为例

唐金波 广东省深圳科学高中 518129

林丹 广东省深圳市龙岗区平湖实验学校 518100

[摘要] 数学核心素养是在数学的学习和探索过程中形成的,具有持久性和综合性.文章基于核心素养下的课堂实践,结合核心素养有效的形成过程,以高三一轮复习课的探究性学习为载体,具体探究了在高中数学课堂中发展学生核心素养的过程和方法.

[关键词] 数学核心素养;探究性学习;提出问题;解决问题

随着新课改的深入,课程理念提出了全面发展学生的核心素养.《普通高中数学课程标准(2017年版)》将高中数学核心素养定义为:具有基本数学特征,适应个人终身发展的人的思维品质与关键能力,其中数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数学建模和数据分析被确定为高中学生的六大核心素养^[1].同时课程标准也指出:数学教学应创设合理的问题情境,引导学生主动、积极探究的学习方式,力求通过不同形式的探究性活动,让学生经历数学的再创造过程,让学生体验发现、创造的乐趣.实践表明:数学的探究性学习是有效教学,是构建高效课堂的重要途径,它有助于发展学生的核心素养和提升数学思维品质,有助于培养学生发现问题、提出问题和解决问题的能力.

数学核心素养应该是融入日常的课堂之中的.我们如何构建课堂的内容和形式进而有效培养学生的数学核心素养,是广大数学教师关注的焦点和核心问题.结合上面的思考,笔者针对自

己对新课标的学习和理解,加上长期从事于高三的数学教学,并进行了多次探索,颇有一些收获和感悟.下面是笔者所执教的一节高三一轮复习课“正、余弦定理在解三角形中的应用”的部分教学实录以及启示,以期为同仁们提供参考和帮助.

背景与意图

1. 授课背景

本课是高三一轮复习课,授课对象的学生数学基础较好,课堂氛围活跃,有较强的自主学习能力,喜欢思考问题和提出问题.

2. 设计意图

本课是以探究性学习的形式设计和实施教学内容,从不同的视角探究如何运用正弦、余弦定理解决平面图形中求值和求范围的问题.我们的设计理念是:在问题的探究中培养学生逻辑推理、观察分析、数学运算、转化与化归的能力.

课堂实录

1. 提出问题,引发数学探究

师:之前我们学习了在一个三角形中利用正弦、余弦定理解三角形的问题,这节课我们要探究平面几何图形中解三角形的问题.请同学们就下面解三角形的问题展开研究,从不同的角度解决问题和提出新的问题.(投影问题)

问题:在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线且 $AD=1$,若 $\angle BAC=60^\circ$, $AC=\sqrt{3}$,求 AB 的值.

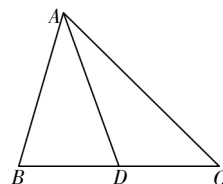


图1

学生开始思考、讨论.

评析:学生数学核心素养的形成依赖于数学活动经验的积累,因此教学设计中,创设合适的情境,提出富有思维深度和有探究价值的数学问题,启发学

作者简介:唐金波(1987-),硕士研究生,中学一级教师,从事数学教学研究;林丹(1991-),硕士研究生,中学一级教师,从事数学教学理论研究.

生独立思考,鼓励与他人交流,掌握知识技能的同时理解数学的本质.知识、方法问题化,以问题来理解知识的本质,是我们有效教学的策略.学生是课堂的主体,只有让学生充分地、有效地参与,尤其是学生的思维参与,才能有效地培养学生的数学核心素养.

2. 突出本质,开拓数学视野

师:研究近几年全国卷高考真题,我们发现解三角形问题有一部分是以多个三角形的平面几何图形为背景的.在问题所给的几何图形中,如果我们抓住一些三角形的边角关系,就能解决问题.同学们有哪些想法呢?

生1:在 $\triangle ABC$ 中,设 $AB=c$, $BC=a$,由余弦定理可得 $a^2=c^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot c\cos 60^\circ$,化简得 $a^2=c^2-\sqrt{3}c+3$ ①.注意到 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补,余弦值互为相反数,即 $\cos \angle ADB=-\cos \angle ADC$,于是在两个小三角形中由余弦定理可得 $\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=-\frac{AD^2+DC^2-AC^2}{2AD\cdot DC}$,从而 $a^2=2c^2+2$ ②.由①②得 $c=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$,因此 $AB=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$.

师:表达得很清楚,观察到了两角互补在不同的三角形中利用余弦定理建立方程组,从而解决问题.还有其他的办法吗?

生2:我也是通过方程组来解决的,可以把 $\angle B$ (或 $\angle C$)放在两个不同的三角形中利用余弦定理求出,即 $\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$,化简得 $a^2=2c^2+2$,接下来同生1.

师:上面两位同学都是通过建立方程组解决问题,而建立方程的方法是在不同的三角形中应用余弦定理,同时注意到两角互补、同一个角(或同一条边)可以放在不同的三角形中应用.重新分析问题发现,已知三角形中三个独立的条件可以求值,但此问题的三个条件不在同一个三角形中,能否利用转化与化归的思想把这三个条件转化到同一个三角形中呢?

生3:如图2,构造平行四边形 $ABEC$,由平行四边形的性质知, $\angle ACE=120^\circ$, $AE=2$, $AC=\sqrt{3}$,直接在 $\triangle ACE$ 中利用

余弦定理解出 $CE=AB$.(此时教室里一片掌声)

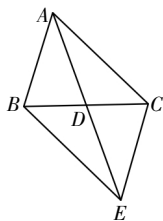


图2

师:你是怎么想到构造平行四边形的?

生3:我注意到 AD 是中线,就联想到了平行四边形.经过一番尝试,从而将条件转化到了同一个三角形中,应用余弦定理建立一个方程得到了答案.

生4:我也是利用转化的想法,由中点联想到中位线.如图3,作 AB 的中位线 DF ,在 $\triangle ADF$ 中利用余弦定理得出答案.

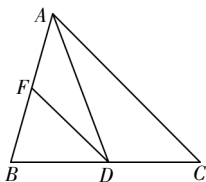


图3

师:很好,生3、生4运用模型的思想经过探究和构造,将条件转化到同一个三角形中来解决问题,体现了转化和化归的数学思想.

生5:我是利用向量求出的,由于 AD 是中线,则 $2\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}$,两边同时平方得 $4=c^2+3+\sqrt{3}c\cdots\cdots$

生6:由于 $\triangle ABC$ 的一个角是已知的,我考虑通过建立平面直角坐标系的方法来研究,以下是我的解法:建立图4所示的直角坐标系,设 $B(c,0)$,由 $AC=\sqrt{3}$,可得 $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,于是 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{c}{2},\frac{3}{4}\right)$.因为 $AD=1$,所以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{9}{16}=1$,即 $c=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$.

教室里出现了洪亮的掌声,学生感

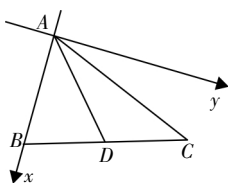


图4

受到了数学思维的深刻,只要勇于思考就能找到简洁优美的方法,同时也感悟到了数学的美和学习数学的乐趣.

师:非常好,生5利用向量等式两边同时平方,将向量等式转化为边角的数量关系.这一思想体现了向量在解三角形中的应用.生6通过建立坐标系,得到了 AB 长度的表达式,解法非常简洁.说明只要我们用心深入探究,就会有新的发现和新的收获.

评析:著名的数学教育家G.波利亚说过:“观察可能导致发现,观察将揭示某种规律、模式或定律.”这句话启示我们:要想学会数学,加强数学能力,就需要观察,从不同的角度去思考,发现问题,探索问题的规律性.教师在教学中要充分发挥引领者的作用,给他们创造条件,从问题的不同角度和方法进行探究.这是数学思维的本质,是理解知识、解决问题、发现问题的关键,也是有效落实核心素养的一种途径.上面的探究活动,就是教师创设合适的情境帮助学生从不同的视角去理解三角形中最基本、最本质的东西.通过从代数(方程、方程组、坐标)和几何(转化到一个三角形中)的角度,建立起求解的模型,发现解决问题的方法,点燃了数学思维的火花.

3. 类比拓展,深化探究学习

师:刚才我们已经研究了中线的问题,你能通过类比,提出并探究新的问题吗?

生7:我提出两个问题:(1)将 D 点改为 BC 边上的三等分点,其他条件不变,探究如何求 AB 的值;(2)将中线 AD 改为 BC 边上的高,其他条件不变,探究如何求 AB 的值.

生8:我将中线 AD 改为 $\angle BAC$ 的角平分线,其他条件不变,探究如何求 AB 的值.

评析:教师没有直接给出问题,而是引导学生通过类比提出新的问题,以培养学生发现问题、提出问题的能力.

师:对于将 D 点改为 BC 边上的三等分点的问题,我们可以仿照前面的几种解法,不难得出答案.接下来我们先从高的问题开始探究.

生9:我研究了生7提出的第二个问题,我的解法如下:在 $\triangle ABC$ 中,设 $AB=c$, $BC=a$,由余弦定理得 $a^2=c^2+(\sqrt{3})^2-$

$2\sqrt{3}c\cos 60^\circ$, 化简得 $a^2=c^2-\sqrt{3}c+3$ ①.
又 AD 是 BC 边上的高, 由等面积法可得
 $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}BC \cdot AD$, 化简得 $a = \frac{3}{2}c$ ②. 由 ①② 得 $c = \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5}$, 进而得到结果.

师: 很好, 利用等面积法和方程组, 轻松地解决了问题, 体现了条件基本的用法.

生10: 我研究了生8提出的问题, 如图5所示, 在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理得 $DC^2=1+3-2\sqrt{3}\cos 30^\circ=1$, 即 $DC=1$, 从而 $\angle ACD=30^\circ$, $\angle ADB=60^\circ$, 于是 $\angle ABD=90^\circ$, 因此 $AB=AD \cdot \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

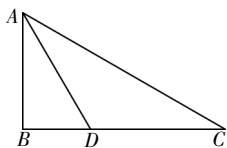


图5

师: 从给出的已知数据的角度来说, 可以把问题分为求值和求取值范围. 我们知道, 已知三角形中三个独立的条件可以求值, 如果只已知三角形中两个独立的条件呢? 请同学们通过研究, 提出并探究新的问题.

生11: 我提出下面两个问题: 已知 AD 是 BC 边上的中线, 若 $\angle BAC=60^\circ$, $AD=1$, (1) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值; (2) 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

评析: 在教师的引导下, 学生通过减少已知条件, 将确定性问题转化为求最大值的问题. 而三角形中的面积和周长是联系边、角关系基本的要素, 通过转化的思维创造性地提出新的问题, 这些问题既合情合理, 又具有深度, 更重要的是在深刻理解三角形本质的基础上, 充分发挥研究数学、做数学等核心素养.

师: 这两个问题的提出让我们眼前一亮, 自己要提出新的数学问题并不是那么难. 这两个问题是如此的简洁和深刻, 体现了数学的简洁美. 本节课我们先研究三角形面积的问题, 周长的问题留给大家课后探究.

生12: 如图6, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, 由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc$ ①; 因为 $\cos \angle ADB = -\cos \angle ADC$, 所以 $a^2=2b^2+$

$2c^2-4$ ②. 由 ①② 得 $bc=4-(b^2+c^2)$, 由基本不等式知 $bc \leq \frac{4}{3}$, 当且仅当 “ $b=c$ ” 时取等号. 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 $b=c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时 $\triangle ABC$ 的面积取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

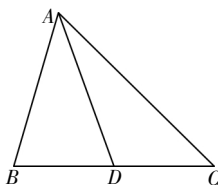


图6

生13: 我也是利用基本不等式的方法, 但是我运用了向量解法更加简洁. 我的解法是: $2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$, 两边同时平方得 $4=b^2+c^2+bc$, 由基本不等式得 $3bc \leq 4$, 下面的步骤同生12.

师: 非常精彩, 刚才两位同学都是通过基本不等式来理解问题, 但是从不同的角度(一个是方程组, 一个是向量)来构建不等式模型, 使问题得到了解决. 说明我们只有掌握方法的本质, 就有新的发现和收获.

生13: 我还有一种处理方法, 如图7, 作平行四边形, 则 $\angle ABE=120^\circ$, $AE=2$, 设 $\angle BAE=\alpha$, $\angle BEA=\beta$. 在 $\triangle ABE$ 中, 由正弦定理得 $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \beta} = \frac{2}{\sin 120^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \alpha$, $c = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \beta$, $\alpha + \beta = 60^\circ$. 所以 $S = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}bc = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \sin \beta = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3} \right)$, 所以 $2\alpha + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right)$, 利用

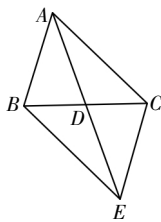


图7

三角函数求出最大值.

生14: 根据生13的方法, 我可以得到更简单的做法. 易知 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\triangle ABE$ 的面积, 在 $\triangle ABE$ 中已知一个角和其对边, 则它的外接圆是确定的, 点 B 在劣弧 AE 上运动, 当 B 在最高点时, 即 $\triangle ABE$ 是顶角为 120° 的等腰三角形时, $\triangle ABE$ 的面积最大为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

同学们兴奋起来了……

生15: 我受之前同学的启发, 通过建立平面直角坐标系的方法来研究, 以下是我的解法: 建立图8所示的直角坐标系, 因为 $AD=1$, 可知点 D 在以 A 为圆心、半径等于1的圆上, 由圆的参数方程可设 $D(\cos \theta, \sin \theta)$, 由题意得 $C\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, 2 \sin \theta\right)$, $B\left(2 \cos \theta - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, 0\right)$, $|AC| = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \theta$, $|AB| = 2 \cos \theta - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta$, 故 $S = \frac{1}{2} |AC| \cdot |AB| \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3}$, 下面的做法同生14.

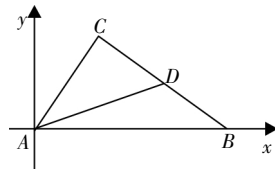


图8

此时教室里出现了掌声, 同学们感觉非常的振奋, 完全是在享受探究问题的乐趣.

师: 这两位同学分别从不同的角度思考问题, 不同解法的提出源于他们对问题的观察和对模型深刻的理解. 生13运用补形将问题转化为我们最基本的三角形模型; 已知一角和对边, 这是解决问题的关键. 生15通过建立直角坐标系, 运用轨迹的思想将 $AD=1$ 的静态问题理解为点 D 在圆弧上运动的轨迹, 彰显了静中有动的数学理性精神.

评析: 开放性的教学, 引导学生发现问题和提出问题是有效落实核心素养的关键, 也是提高学生对数学学习兴趣的重要途径. G.波利亚说过: “提出问题比解决问题更重要.” 这句话启发我

(下转第19页)

的理解及掌握,并有效地提升了学生的数学抽象、逻辑推理、数学建模和数学运算等核心素养.

同时,为了更好地帮助学生巩固和加深所学知识,本文精选了以下四个练习题:

题1:等式 $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+1$ 成立吗?请根据下面的数学归纳法的证明过程进行判断.

证明:假设当 $n=k$ 时等式成立,即 $2+4+6+\cdots+2k=k^2+k+1$,

则当 $n=k+1$ 时, $2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)=k^2+k+1+2(k+1)=(k+1)^2+(k+1)+1$,所以等式成立.

题2:用数学归纳法证明等式 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$,下面的证明过程对吗?若不对请改正.

证明:①当 $n=1$ 时,左边 $=2\times 1-1=1$,右边 $=1^2=1$,所以等式成立;

②假设当 $n=k$ 时等式成立,即 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$,则当 $n=k+1$ 时, $1+3+5+\cdots+(2k+1)=\frac{[1+(2k+1)]\times(k+1)}{2}=(k+1)^2$,所以等式成立;

③由①②可得,对任意的正整数 n ,

等式都成立.

题3:用数学归纳法证明“ $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)$, $n\in\mathbf{N}^*$ ”时,从 $n=k$ 到 $n=k+1$,等式的左边需要多乘的代数式是()

- A. $2k+1$ B. $\frac{2k+1}{k+1}$
C. $\frac{2k+3}{k+1}$ D. $4k+2$

题4:用数学归纳法证明: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

结束语

基于“问题—探究”教学模式,教师在学生的“最近发展区”创设情境和设置问题,通过问题打开学生的思维,引导学生自主参与探究活动,使学生在生活探究、数学探究、方法探究、运用探究等四个过程中加深体会并提升自身的数学核心素养.学生在这种实践性的探究和学习中积极思考,乐于交流,碰撞思维,不断地体验失败与成功,进而加深对学习对象本质属性的理解,顺利建构新的认知系统.在开展“问题—探究”教

学时,教师要为学生提供足够的思考时间和宽松的探究氛围,以便让学生的思维真正参与教学活动;教师还要鼓励和训练学生提出问题,培养学生用质疑的眼光和思考的态度面对未知的规律,教师也同樣会在学生精彩纷呈的表现中受益匪浅.

参考文献:

- [1] 人民教育出版社中学数学室.普通高中课程标准实验教科书:数学选修2-2(A版)教师教学用书[M].北京:人民教育出版社,2009.
- [2] 中华人民共和国教育部制订.普通高中数学课程标准(2017年版)[S].北京:人民教育出版社,2018.
- [3] 黄智华.聚焦探究教学,提升核心素养——评朱婷婷老师的“数学归纳法”(第1课时)课例[J].中学数学教学参考(上旬),2019(03).
- [4] 贾兵,陆学政.“多米诺骨牌实验”的教学思考——省级优秀课评比“数学归纳法”观摩有感[J].中学数学教学,2010(03).

(上接第15页)

们:要想加强数学能力,就要善于思考,去发现问题、提出问题,探索问题的根源和规律.作为教师,就是要在必要的时候对学生加以引导,放手让学生去探究,体会知识的本质.以上的探究过程,是教师创设条件,帮助学生学习数学抽象、数学运算、数学建模的过程,核心素养得到了培养.

结语

探究性学习是指学生亲身经历提出问题 and 解决问题的学习过程^[2].笔者认为,重视探究性学习是对传统数学学习认识上的一个提升,不仅有利于形成“四基”,也是提高“四能”的有效手段,还是落实“三会”(会用数学的眼光观察世界,会用数学的思维思考世界,会用数学的语言表达世界)的重要途径,更是培养数学核心素养具体实践的方法,对学生的可持续发展具有重大意义.

问题是知识的载体,问题是数学的心脏,一切思维都是从问题开始的.教学中教师要精心设计有探究价值的问题背景供学生研究,但是很多时候教师给出的问题背景,学生往往不能很好地进行探究,所以选择合适的素材和合理的情境是探究性学习的前提^[3].素材可来源于一些具有拓展性的、典型性的基本问题和基本结论,也可以是教材的例题、课后习题、探究思考以及一些高考题.此时教师还应搭建研究平台,让学生充分参与思考和讨论,引导学生从不同的角度去观察和分析,让问题在学生的最近发展区内,创造机会使得学生从中发现新的问题,提出新的问题.本课能取得比较好的效果得益于:学生比较活跃,勇于表达自己的想法,他们已经初步掌握了高中所学的知识,有了一定的数学探究意识,积累了一些数学学习经验.采用探究性学习的方式对问题进行拓展,对学生的学习方式和能力的提高具有良好的示范.本课的探究主要分为两个方

面:一是静态地求值,通过从不同的视角探究、解决问题,同时又提出新的问题;二是动态地求最大值,从不同的角度构建基本不等式、函数、轨迹等基本数学模型,彰显了动静结合的数学之美.

实践证明:教师创设有效的问题情境,有意识地培养学生探究性学习的能力,多留给学生发现问题和提出问题的机会,多让学生去表达自己的想法和见解.长期下来,学生的数学核心素养也就得到了落实和发展.这大概就是探究性学习的教育价值所在.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制订.普通高中数学课程标准(2017年版)[S].北京:人民教育出版社,2018.
- [2] 蔡欣.探究性学习的实践与感悟——以一道课本习题为例[J].数学通报,2018,57(05).
- [3] 董荣森.让探究成为数学课堂的常态[J].数学通报,2014,53(01).