江苏省仪征中学2020届高考考前数学热身练 6

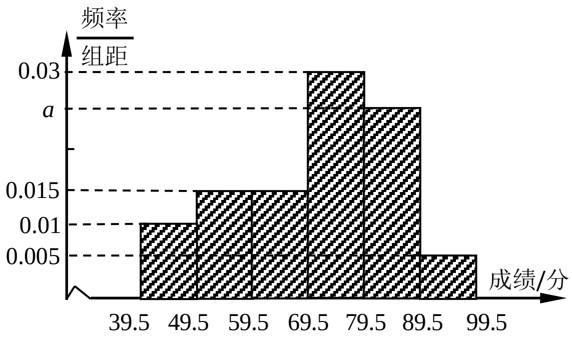
班级________ 姓名____________ 学号________ 日期________ 评价________

一、填空题：

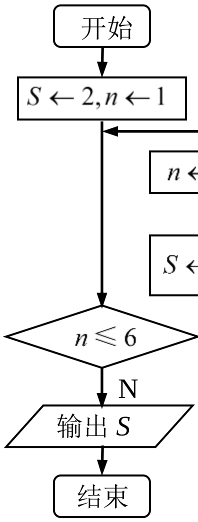
1．已知集合 $A=\{0,9\}$，$B=\{1,2,9\}$，则集合 $A\cup B$ 中的元素个数为__________.

2．复数 $z^2=2\mathrm{i}$（i 是虚数单位），则 $z\cdot\overline{z}=$_________.

3．从参加疫情防控知识竞赛的学生中抽出 60 名学生，将其成绩（均为整数）整理后画出的频率分布直方图如图所示，则这 60 名学生中成绩在区间 $[79.5,89.5)$ 的人数为___________.



（第 3 题）



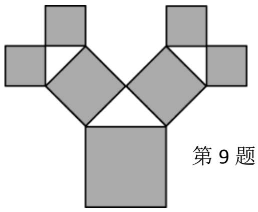
（第 4 题）

4．执行如图所示的算法流程图，则输出的结果为___________.

5．若将一颗质地均匀的骰子(一种各面上分别标有 1，2，3，4，5，6 个点的正方体玩具)，先后抛掷两次，则两次点数之和大于 10 的概率为_________.

6．已知数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的均值为 2，方差为 9，那么数据 $2x_1+3,\ 2x_2+3,\ \cdots,\ 2x_{10}+3$ 的方差为________.

7．已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,m)$，若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，则实数 m 的值为________.


第 9 题图

8．已知圆锥的侧面展开图是一个半径为 4，面积为 4π 的扇形，则该圆锥的体积为_____.

9．如图所示是毕达哥拉斯(Pythagoras)的生长程序：正方形上连结着等腰直角三角形，等腰直角三角形边上再连结正方形，…，如此继续，若共得到 1 023 个正方形，设初始正方形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则最小正方形的边长为_________.

10．已知函数 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})$，$x\in(0,\frac{3}{2}\pi)$，若函数 $g(x)=3f(x)-2$ 的两个零点分别是 x_1,x_2，则 $g(x_1+x_2)$ 的值为________.

11．设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1), & x\geqslant 0,\\ g(x), & x<0,\end{cases}$ 则 $g[f(-7)]$ 的值为_____________.

12．在平面直角坐标系 xOy 中，若圆 $C_1:x^2+y^2-2y=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+ax-2\sqrt{3}ay=0$ 上分别存在点 P，Q，使 $\triangle POQ$ 为以 O 为直角顶点的等腰直角三角形，且斜边长为 $2\sqrt{2}$，则实数 a 的值为___________．

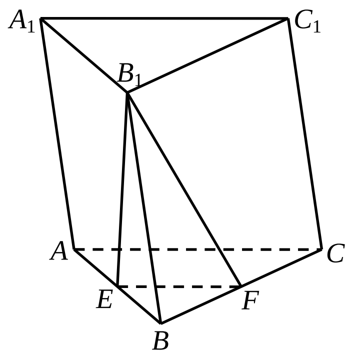
13．若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{2}{\tan B}=\dfrac{3}{\tan C}$，则 $\cos C$ 的最小值为____________．

14．若函数 $f(x)=|x\ln x-a|+a$，$x\in(0,1]$ 的最大值为 0，则实数 a 的最大值为_______．

二、解答题：

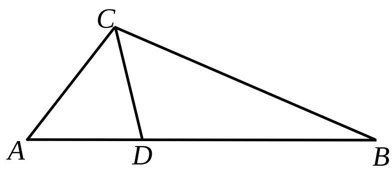
15．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC，$AB\perp AC$，E，F 分别是棱 AB，BC 的中点．求证：

（1）A_1C_1 // 平面 B_1EF；（2）$AC\perp B_1E$．



16．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{6}$，D 为 AB 边上一点，$CD=AD=2$，且 $\cos\angle BCD=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

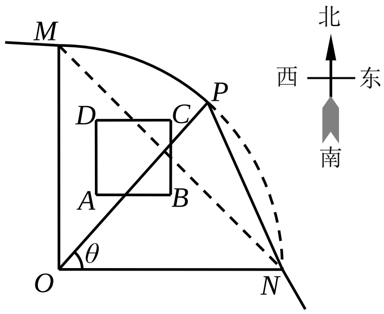
（1）求 $\sin B$ 的值；（2）求 $\triangle ABC$ 的面积．



17．如图，某市地铁施工队在自点 M 向点 N 直线掘进的过程中，因发现一地下古城(如图中正方形 $ABCD$ 所示区域)而被迫改道. 原定的改道计划为：以 M 点向南，N 点向西的交汇点 O 为圆心，OM 为半径做圆弧$\overset{\frown}{MN}$，将$\overset{\frown}{MN}$作为新的线路，但由于弧线施工难度大，于是又决定自 P 点起，改为直道 PN . 已知 $ON=OM=3$ 千米，点 A 到 OM, ON 的距离分别为 $\frac{1}{2}$ 千米和 1 千米，$AB // ON$ ，且 $AB=1$ 千米，记 $\angle PON=\theta$.

（1）求 $\sin\theta$ 的取值范围；

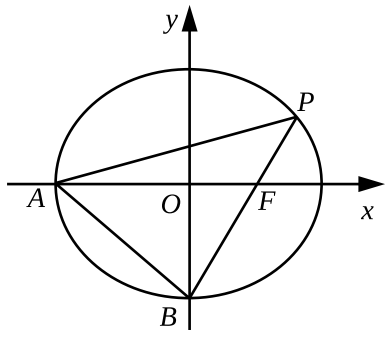
（2）已知弧形线路$\overset{\frown}{MP}$的造价与弧长成正比，比例系数为 $3a$，直道 PN 的造价与长度的平方成正比，比例系数为 a，当 θ 为多少时，总造价最少？



18．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的右焦点为 F，左顶点为 A，下顶点为 B，连结 BF 并延长交椭圆于点 P，连结 PA，AB . 记椭圆的离心率为 e.

（1）若 $e=\frac{1}{2}$，$AB=\sqrt{7}$，求椭圆 C 的标准方程；

（2）若直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $\frac{1}{6}$，求 e 的值.



三、附加题：

1.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & a\\ b & 2\end{bmatrix}$，点 $M(1,1)$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的变换作用下变为点 $N(4,4)$.

（1）求 a， b 的值；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

2.在极坐标系中，已知两点 $A(4,\dfrac{\pi}{6})$， $B(2,\dfrac{\pi}{2})$．以极点为坐标原点，极轴为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系 xOy，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2t,\\ y=\sqrt{3}t+2\end{cases}$（$t$ 为参数).

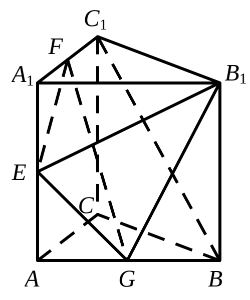
（1）求 A， B 两点间的距离；

（2）求点 A 到直线 l 的距离.

3.如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=AA_1=2$，E，F，G 分别为 AA_1，A_1C_1，AB 的中点.

（1）求异面直线 BC_1 与 EF 所成角的余弦值；

（2）求二面角 B_1-EG-F 的余弦值.



江苏省仪征中学2020届高考考前数学热身练6参考答案与评分标准

一、填空题

1．4　　2．2　　3．15　　4．2　　5．$\frac{1}{12}$　　6．36　　7．5　　8．$\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

9．$\frac{1}{32}$　　10．$-\frac{7}{2}$　　11．-2　　12．± 2　　13．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　14．$-\frac{1}{2e}$

二、解答题

15．（1）在$\triangle ABC$中，E，F分别是棱AB，BC的中点，所以$EF//AC$，…2分

又在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1C_1//AC$，

所以$A_1C_1//EF$，…………………………………………………………4分

又因为$A_1C_1\not\subset$平面B_1EF，$EF\subset$平面B_1EF，

所以$A_1C_1//$平面B_1EF．…………………………………………………8分

（2）因为侧面$ABB_1A_1\perp$底面ABC，侧面$ABB_1A_1\cap$底面$ABC=AB$，

$AB\perp AC$，$AC\subset$平面ABC，所以$AC\perp$平面ABB_1A_1，……………12分

又因为$B_1E\subset$平面ABB_1A_1，所以$AC\perp B_1E$．…………………………14分

16．（1）在ΔADC中，由余弦定理得

$$\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\times2\times2}=\frac{1}{4},$$ ……………………2分

所以$\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，……………………4分

因为$\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\angle BCD$是三角形$BCD$的内角，

所以$\sin\angle BCD=\sqrt{1-\cos^2\angle BCD}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，……………………6分

所以
$$\begin{aligned}\sin\angle B&=\sin(\angle ADC-\angle BCD)\\&=\sin\angle ADC\cos\angle BCD-\cos\angle ADC\sin\angle BCD\\&=\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{10}}{4}\\&=\frac{\sqrt{10}}{8}.\end{aligned}$$ ……………………………………………………8分

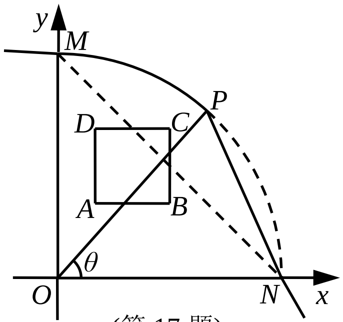
（2）在ΔBCD中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle B}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，…………10分

$$BD=\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle B}=\frac{2\times\frac{\sqrt{10}}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{8}}=4,$$

$$BC=\frac{CD\sin\angle BDC}{\sin\angle B}=\frac{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{8}}=2\sqrt{6},$$ ……………………………12分

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle B=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{10}}{8}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$． …………14 分

17．（1）以 O 为原点，ON 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，



(第 17 题)

则 $N(3,0)$， $A(\frac{1}{2},1)$， $C(\frac{3}{2},2)$，

所以直线 CN 的方程为 $y=-\frac{4}{3}(x-3)$，

MN 所在圆的方程为 $x^2+y^2=9$，

联立 $\begin{cases} y=-\frac{4}{3}(x-3), \\ x^2+y^2=9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{21}{25}, \\ y=\frac{72}{25}, \end{cases}$，

当 PN 过点 C 时，$P(\frac{21}{25},\frac{72}{25})$， $\sin\theta=\frac{24}{25}$，

所以 $\sin\theta$ 的取值范围是 $(0,\frac{24}{25})$． ……………………………………………6 分

（2）MP 的长为 $3(\frac{\pi}{2}-\theta)$，设 $P(3\cos\theta,3\sin\theta)$，

则 $PN^2=(3\cos\theta-3)^2+(3\sin\theta)^2=18-18\cos\theta$，……………………………8 分

所以总造价 $f(\theta)=3a\times 3(\frac{\pi}{2}-\theta)+a(18-18\cos\theta)$

$=a(\frac{9\pi}{2}+18-9\theta-18\cos\theta)$， $\theta\in(0,\theta_0)$， $\sin\theta_0=\frac{24}{25}$， …10 分

所以 $f'(\theta)=a(18\sin\theta-9)$，

令 $f'(\theta)=0$ 得， $\sin\theta=\frac{1}{2}\in(0,\frac{24}{25})$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$，列表如下：

θ	$(0,\frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\pi}{6},\theta_0)$
$f'(\theta)$	−	0	+
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时， $f(\theta)$ 有极小值，也是最小值.

答：当 θ 为 $\frac{\pi}{6}$ 时，总造价最少. ……………………………………………14 分

18．（1）设椭圆的焦距为 $2c$.

由题意，得 $\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2=4, \\ b^2=3. \end{cases}$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………4 分

（2）因为 B，F 在直线 PB 上，所以直线 PB 的方程为 $\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{-b}=1$．

解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{-b}=1,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{2a^2c}{a^2+c^2},\\ y_1=\dfrac{b\left(a^2-c^2\right)}{a^2+c^2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=-b,\end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{2a^2c}{a^2+c^2},\dfrac{b\left(a^2-c^2\right)}{a^2+c^2}\right)$． ……………………………………8 分

因为直线 PB 的斜率 $k_{PB}=\dfrac{0-(-b)}{c-0}=\dfrac{b}{c}$，

直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\dfrac{\dfrac{b\left(a^2-c^2\right)}{a^2+c^2}-0}{\dfrac{2a^2c}{a^2+c^2}+a}=\dfrac{b\left(a^2-c^2\right)}{2a^2c+a(a^2+c^2)}$

$=\dfrac{b\left(a^2-c^2\right)}{a(2ac+(a^2+c^2))}=\dfrac{b\left(a^2-c^2\right)}{a(a+c)^2}=\dfrac{b\left(a-c\right)}{a(a+c)}$， …………12 分

又因为直线 PA 和 PB 的斜率之积为 $\dfrac{1}{6}$，

所以 $\dfrac{b\left(a-c\right)}{a(a+c)}\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{b^2\left(a-c\right)}{ac(a+c)}=\dfrac{\left(a^2-c^2\right)\left(a-c\right)}{ac(a+c)}=\dfrac{\left(a-c\right)^2}{ac}=\dfrac{1}{6}$，

化简得 $6a^2-13ac+6c^2=(3a-2c)(2a-3c)=0$，

因为 $a>c$，所以 $2a=3c$，

所以椭圆的离心率 $e=\dfrac{2}{3}$． ………………………………………………………16 分

19．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-ax$， e 是自然对数的底数， $a\in\mathbf{R}$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

（3）若存在正实数 b，使得对任意的 $x\in(0,b)$，总有 $f(x)<x^2+1$，求 a 的取值范围．

（1）当 $a=1$ 时， $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$， $f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$，

则 $f(0)=1$， $f'(0)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$． ………………2 分

（2）因为 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，

即 $f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-a\geqslant 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，

所以 $a\leqslant \mathrm{e}^x+2x$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，……………………………………………4 分

又因为函数 $y=\mathrm{e}^x+2x$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

所以 $a\leqslant \mathrm{e}+2$，当且仅当 $a=\mathrm{e}+2$， $x=1$ 时， $f'(1)=0$，

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,\mathrm{e}+2]$． ……………………………………………6 分

（3）不等式 $f(x)<x^2+1$ 即 $\mathrm{e}^x-ax<1$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^x-ax-1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

①当 $a\leqslant 1$ 时， $g'(x)=\mathrm{e}^x-a>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增，所以 $g(x)>g(0)=0$，不符合题意；…10 分

②当 $a>1$ 时，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\ln a$，列表如下：

x	$(0,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

令 $b=\ln a$，在 $(0,\ln a)$ 上，总有 $g(x)<g(0)=0$，符合题意，

综上所述，a 的取值范围为 $(1,+\infty)$．……………………………………16 分

20．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=6$，$a_2=-3$，$a_n+a_{n+3}=a_{n+1}+a_{n+2}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）若 $a_3=4$，求 a_4，a_5 的值；

（2）证明：对任意正实数 m，$\{a_{2n}+ma_{2n+1}\}$ 成等差数列；

（3）若 $a_n>a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_3+a_4=-33$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（1）当 $n=1$ 时，$a_1+a_4=a_2+a_3$，所以 $a_4=-5$，

当 $n=2$ 时，$a_2+a_5=a_3+a_4$，所以 $a_5=2$．………………………………2 分

（2）因为 $a_n+a_{n+3}=a_{n+1}+a_{n+2}$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n-1}+a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，

两式相加得，$a_{n-1}+a_{n+3}=2a_{n+1}$，………………………………………………6 分

即 $a_{n+3}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_{n-1}$，

所以 $\{a_{2n-1}\}$ 为等差数列，设公差为 d_1，$\{a_{2n}\}$ 为等差数列，设公差为 d_2．

所以 $(a_{2n+2}+ma_{2n+3})-(a_{2n}+ma_{2n+1})=(a_{2n+2}-a_{2n})+m(a_{2n+3}-a_{2n+1})=d_2+md_1$，

所以 $\{a_{2n}+ma_{2n+1}\}$ 成等差数列．……………………………………………10 分

（3）设奇数项所成等差数列的公差为 d_1，偶数项所成等差数列的公差为 d_2．

①当 n 为奇数时，$a_n=6+\dfrac{n-1}{2}d_1$，$a_{n+1}=-3+\dfrac{n-1}{2}d_2$，

则 $6+\dfrac{n-1}{2}d_1>-3+\dfrac{n-1}{2}d_2$，即 $n(d_1-d_2)+18+2(d_2-d_1)>0$，

所以 $\begin{cases}d_1-d_2\geqslant 0,\\ 1\times(d_1-d_2)+9+d_2-d_1>0,\end{cases}$，故 $d_1-d_2\geqslant 0$．…………………………12 分

②当 n 为偶数时，$a_n=-3+(\dfrac{n}{2}-1)d_2$，$a_{n+1}=6+\dfrac{n}{2}d_1$，

则 $-3+(\dfrac{n}{2}-1)d_2>6+\dfrac{n}{2}d_1$，即 $n(d_1-d_2)+18+2d_2<0$，

所以 $\begin{cases}d_1-d_2\leqslant 0,\\ 2\times(d_1-d_2)+18+2d_2<0,\end{cases}$，故 $\begin{cases}d_1-d_2\leqslant 0,\\ d_1<-9,\end{cases}$．

综上可得，$d_1=d_2<-9$．……………………………………………………………14 分

又 $a_3+a_4=a_1+a_2+d_1+d_2=3+2d_1=-33$，所以 $d_1=-18$．

所以当 n 为奇数时，$a_n=6+\dfrac{n-1}{2}\times(-18)=15-9n$；

当 n 为偶数时，$a_n=-3+(\dfrac{n}{2}-1)\times(-18)=15-9n$．

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=15-9n$，$n\in\mathbf{N}^*$．…………………………16 分

三、附加题

1．（1）由条件知，$\begin{bmatrix}3 & a\\ b & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+a\\ b+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}$，所以$\begin{cases}3+a=4,\\ b+2=4,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$…5 分

（2）由（1）知，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，

矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)-2=(\lambda-1)(\lambda-4)$，

令$f(\lambda)=0$，解得$\boldsymbol{A}$的特征值为 1 和 4．……………………………………10 分

2．（1）在$\triangle OAB$中，$A(4,\dfrac{\pi}{6})$，$B(2,\dfrac{\pi}{2})$，

由余弦定理，得$AB=\sqrt{4^2+2^2-2\times4\times2\cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6})}=2\sqrt{3}$．………………5 分

（2）直线l的普通方程为$\sqrt{3}x-2y+4=0$，

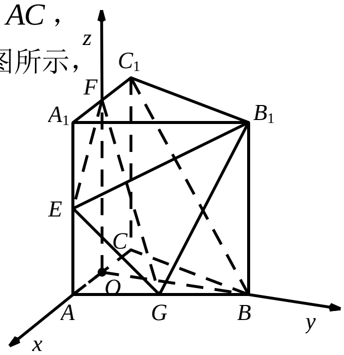
点A的直角坐标为$(2\sqrt{3},2)$，

所以点A到直线l的距离为$\dfrac{|\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-2\times2+4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2)^2}}=\dfrac{6}{7}\sqrt{7}$．…………………10 分

3．（1）取AC的中点O，连接FO，BO，

在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$FO\perp$平面ABC，$BO\perp AC$，

以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}\}$为基底建立空间直角坐标系$O-xyz$如图所示，



则$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$E(1,0,1)$，$F(0,0,2)$，

$B_1(0,\sqrt{3},0)$，$C_1(-1,0,2)$，

所以$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,-\sqrt{3},2)$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{BC_1}|}=\dfrac{3}{4}$，

所以异面直线BC_1与EF所成角的余弦值为$\dfrac{3}{4}$；………………4 分

（2）因为G为AB的中点，所以$G(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，则$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{EG}=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},-1)$

设平面EFG的法向量为$\vec{n}_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

平面EGB_1的法向量为$\vec{n}_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

则$\begin{cases}\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{n}_1\cdot\overrightarrow{EG}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}-x_1+z_1=0\\ -\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-z_1=0\end{cases}$，

令$z_1=1$，得$\vec{n}_1=(1,\sqrt{3},1)$，同理$\vec{n}_2=(\sqrt{3},1,0)$

所以$\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle=\dfrac{\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以二面角的大小与向量$\vec{n}_1,\vec{n}_2$所成的角相等或互补，

由图形知，二面角 B_1-EG-F 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$． ················10 分

4．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，且 $a_{n+1}=a_n-a_n^2$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求证：$\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$；

（2）求证：$\mathrm{C}_n^1(2a_n-1)+2\mathrm{C}_n^2(2a_n-1)^2+\cdots+k\mathrm{C}_n^k(2a_n-1)^k+\cdots+n\mathrm{C}_n^n(2a_n-1)^n\leqslant 0$．

（1）因为 $a_{n+1}=a_n-a_n^2$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-a_n$．

要证 $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$，只需证 $0<a_n\leqslant\dfrac{1}{2}$． ··· 2 分

用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{1}{2}$，命题成立；

假设当 $n=k$（$k\geqslant 1$，$k\in\mathbf{N}^*$）时命题成立，即 $0<a_k\leqslant\dfrac{1}{2}$，

则当 $n=k+1$ 时，有 $a_{k+1}=a_k-a_k^2=-\left(a_k-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，

由于 $0<a_k\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $0<a_{k+1}\leqslant\dfrac{1}{4}$，显然有 $0<a_{k+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$，

所以当 $n=k+1$ 时，命题也成立．

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $0<a_n\leqslant\dfrac{1}{2}$ 成立，即 $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 得证． ···········4 分

（2）因为 $k\mathrm{C}_n^k=k\dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$， ···6 分

所以 $k\mathrm{C}_n^k(2a_n-1)^k=(2a_n-1)n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}(2a_n-1)^{k-1}$，

因此 $\mathrm{C}_n^1(2a_n-1)+2\mathrm{C}_n^2(2a_n-1)^2+\cdots+k\mathrm{C}_n^k(2a_n-1)^k+\cdots+n\mathrm{C}_n^n(2a_n-1)^n$

$=(2a_n-1)n\cdot\left(2a_n\right)^{n-1}$．

由（1）知，$0<a_n\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $(2a_n-1)n\cdot\left(2a_n\right)^{n-1}\leqslant 0$，得证． ··············10 分