数学说题的内涵与结构①

洪 梦[1] 吴立宝[1]② 王富英[2]

(1.天津师范大学教育学部 300387;2.四川省成都市龙泉驿区教育科学研究院 610100)

1 引言

随着课程改革的不断深入和时代的发展,学科教研活动由早期的侧重"课堂教学"研究,发展到后来的"说课"活动,再到目前以"试题解说"为着眼点的生动而有活力的"说题"教研活动[1].从说题主体来看,说题可分为教师说题、学生说题、教师和学生互动说题[2],本文主要指教师说题.

数学说题活动将"命题"、"学题"、"教题"和"反思"四大范畴有机融合,要求教师从学生的认知规律和教学实际出发,高视角认识和研究数学题,充分发挥教材中的例、习题等数学题的功能[3][4],揭示其命题规律和解题思路,全面系统认识数学的本质,因此说题能力逐渐成为数学教师必备的核心素养.说题教研能够引领教师正确把握考试命题立意的趋势与方向;充分了解学生学情与发展需求;深入研究学科本质与深化数学思维;反思创新促进高效教学的顺利开展.明确数学说题的内涵、特点与结构框架,是正确理解数学说题的前提和基础.

2 数学说题的内涵

数学题是指数学上要求回答或解释的事情,需要研究或解决的矛盾[5].数学说题是教师在备题的基础上,以语言为主要表述工具,以课堂教学为背景,以数学课程标准和现代教育理论为指导,面向同行和专家,系统而概括地解说对一道数学题的教学理解,阐述具体传授某道题的教育设想、方法策略和组织教学的理论依据,分析学生学题时的已有基础、学习障碍和典型问题,并根据听者的建议进行反思改进的教研活动.由此可知,说题活动有机融合"命题"、"学题"、"教题"和"反思"为一体,是一种把握数学本质、促进教师专业成长的教研活动,综合体现教师理解数学、理解学生与理解教学等能力水平.数学说题具有以下特点:

可行性.科学严谨、切实可行是保证数学说题活动质量的前提.教师通过阅读文献、小组讨论等前期准备,基于学生学情和教学实际,设计数学说题流程、准确规范地表达对题目的理解.只有确保数学说题的科学,才能体现说题活动的意义和价值,才能供其他数学教育者参考借鉴.

反思性.说题活动的实质是一种研究反思型教研活动.教师基于数学本质研究分析数学题,深层次揭示数学题的内涵价值,通过说题研讨活动表述解题思维以及教学思路并得到同行和专家的反馈意见,进而不断自我反思完善.数学说题将教学与研究相结合,提升教师的合作意识、教学能力和科研能力.

双角度性.从形式来看,教师说题主要面向同行和专家,但开展说题活动的最终目标是促进高效教学.因此,说题活动设计要立足于教师"教"和学生"学"上,既要体现教师对题目本质的理解与认识,同时要分析学生的认知基础、最近发展区以及思维障碍和误区,从而提高教学的针对性和有效性.

3 数学说题的结构框架

解题是说题的基础.基于数学说题的内涵、特点和解题观点,从命题立意、学生学题、教师教题、反思评价的四个范畴,说审题分析、说学情分析、说学科知识、说解题思路、说变式拓展、说回顾反思的六个环节,厘清条件结论、识别题目类型、明晰背景立意、了解已知未知、清楚能知想知、分析

① 基金项目:天津市哲学社会科学规划一般课题——中小学教师教科研能力水平评估及提升研究(TJJX17—016).

② 本文通讯作者.

万方数据

典型问题、把握知识本质、沟通知识联系、深挖思想方法、确定解题策略、指导解题规范、开展变式教学、适当拓展延伸、回顾解题过程、反思预设生成的十五个站点，构建数学说题结构框架（如图1），现以如下题目为例加以说明．

已知函数为 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，证明：

（Ⅰ）$f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内存在唯一极大值点；

（Ⅱ）$f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

3.1　说审题分析

“在尚未看到主要联系或者尚未作出某种计划的情况下，去处理细节是毫无用处的．”[6] 分析命题是理解题目的核心，是解题的第一步，同时是有效说题的前提．教师要结合数学课程标准和教材，从条件结论、题目类型和背景立意三方面深入分析命题立意，确定要求学生必须掌握的基础知识、基本技能和基本思想方法、基本活动经验和发展学生数学核心素养等教学重点，有利于教师自身进一步理解题意，思考如何解和如何教．

3.1.1　厘清条件结论

教师要根据题目信息厘清题目的条件和结论．首先，区分题目中显性的已知条件；其次，深挖其中隐含的已知条件，即由已知得出哪些结论（性质定理）；最后，根据题目结论的信息探究需要哪些知识（判定定理）．教师要厘清条件结论，弄清楚数学题的字面含义和相关概念，才能知道从何处下手、向何处前进，为进一步获取条件和结论的逻辑关系，构建条件与结论间的联系做准备．

教师根据题目信息已知三角函数与对数函数组合而成的超越函数解析式 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，结论为 $f'(x)$ 在区间内存在唯一极值点以及 $f(x)$ 有且仅有两个零点，隐含条件为函数的定义域 $\{x\mid x>-1\}$，$f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$，得出结论需要画出 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的大致图象．

3.1.2　识别题目类型

教师要根据题目信息了解题目类型，如计算题、证明题、填空题、选择题、作图题等．数学题按

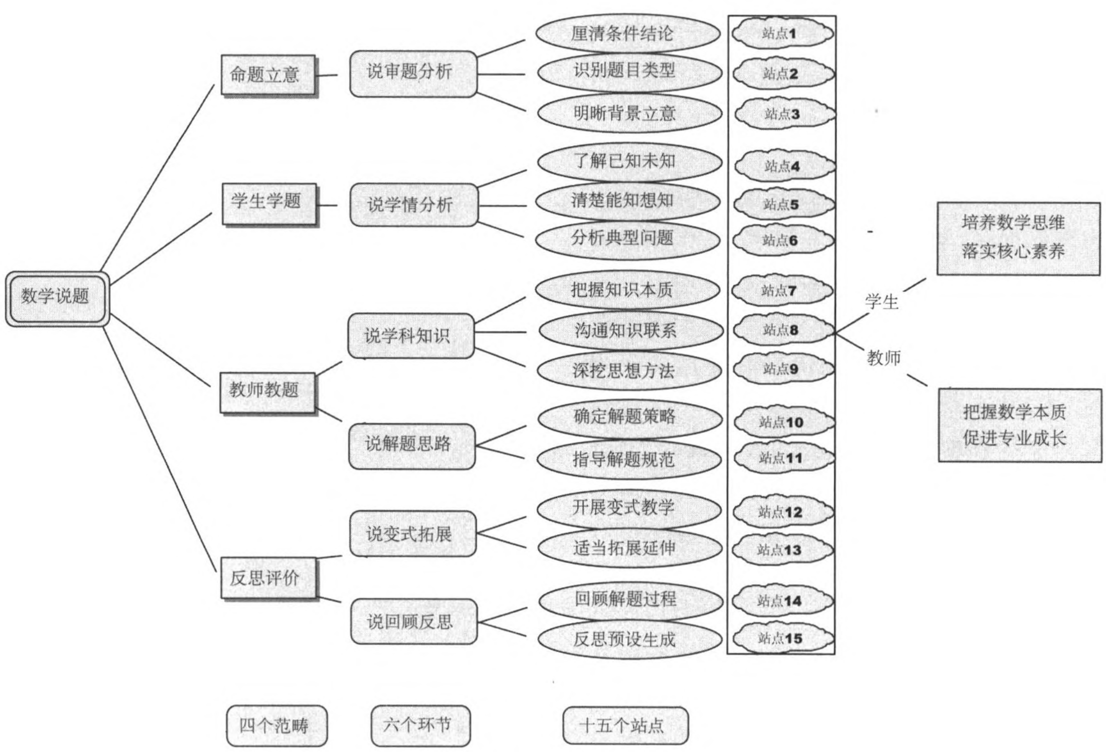

图1　数学说题结构框架

万方数据

评分的客观性、开放性、作答形式、课程内容、解题指令、解题系统要素、教学特征等不同的分类标准有不同的分类.不同类型的数学题有不同的表征方式.通过识别题目类型,合理恰当地选择自然语言、图形语言、符号语言等多种表征方式,将数学题目中的知识转述为数学语言,深入理解数学题的数学含义.按作答形式来看,上题为证明题.数学证明题一般从证明内容、证明方法和证明过程着手,要求学生有较好的逻辑思维和推理能力.

3.1.3 明晰背景立意

教师要根据题目信息明晰背景立意.每一道数学题目都有社会、文化、生活或者高等数学等背景,以及教科书中的思考题、例习题、中高考试题以及竞赛题等来源,充分认识数学题目的背景来源,落实数学课程"把握数学本质"的基本理念.教师还要辨明数学题目的知识载体、数学任务、数学思维活动和对学生知识与能力的层次要求即了解、理解、掌握、运用以及经历、体验、探索,更要清楚对学生数学学科核心素养水平的达成要求.

上题选自2019年高考数学全国卷Ⅰ理科第20题,就往年命题趋势来看,函数题的位置前移,以证明题的形式考查导数的计算及函数的极值与零点的综合应用问题,主要考查学生分析与解决问题的能力,重点提升数学抽象、数学运算和逻辑推理核心素养.

3.2 说学情分析

学情分析指教师通过对学生认知基础、能力水平、态度倾向等维度的分析与研究,设计和改进教学过程,以适应不同学生学习需求的过程[7].教学关注如何采用有效的方法使学生准确无误地获取知识,教师的职责是考虑如何最有效地向学生传递知识[8],基于学情分析的说题设计才是可行有效的,才能达到教学目标和提高教学效率.教师可以从已知、未知、能知、想知的四知模式和典型问题角度进行学情分析.说学情分析是数学说题的基础.

3.2.1 了解已知未知

学生在学习解题之前,已具备一定的知识技能、思想方法、活动经验和思维特征.教师所要做的是利用各种可能的方法了解学生当前的认知发展水平,判断学生已有学习基础对解题的影响.教师从学生的"已知"出发,并结合题目中的已知条件和要求结论,便能够推断出学生的"未知",通过适当的引导帮助学生探索已知与未知之间的联系,获得解题的思路与方法.

以上题为例,学生"已知"是函数的概念、表示、基本性质,二次函数、幂函数等函数模型,函数零点存在定理,导数及其运用,了解研究函数的一般步骤(如图2),并掌握求解函数的极值与零点的一般方法,"未知"是用逻辑推理说明函数在所给区间内存在唯一极大值点的思路与方法以及求解超越函数的基本思想.教师要用数学思想方法构建"已知"与"未知"的联系,帮助学生掌握函数本质,并且在教学中渗透通性通法,避免产生畏难情绪.

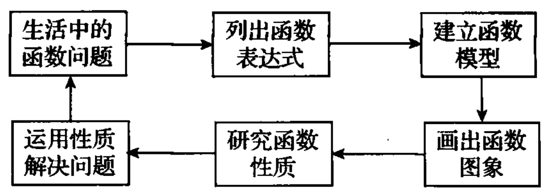

图2 研究函数的一般方法

3.2.2 清楚能知想知

维果茨基称学生独立解决问题时的现有水平和潜在水平的两种发展水平区域为最近发展区,即学生"能知"的范畴.教师要在学生的最近发展区内设置适当的问题串,开展数学思维活动,同时了解学生感兴趣的"想知"内容.在学生"能知"的基础上,教师分析学生学习的兴趣方向,指导教学过程设计将学生的"能知"转化为学生的"想知".教师清楚学生的"能知"与"想知",才能充分调动学生的积极性,因势利导地发挥教师的主导作用和凸显学生的主体地位.

上题学生的"能知"与"想知"可能为利用导数的符号判断函数的单调性;各阶导数与函数的极值和零点的关系;如何画超越函数的图象;函数的定义域与零点的个数的关系等.教师要为此做好预设,并在实际教学中设置适当的问题与活动,引导学生逐步收获"能知"与"想知".

3.2.3 分析典型问题

典型问题指的是学生经常性地违背数学学科内容体系的知识、原理和规律等而出现的审题、解题或者表达错误,以及学生现阶段难以理解和掌握的知识要点与技能方法等教学难点.典型问题

万方数据

反映了学生对数学题的认识与理解，以及在解题过程中存在的认知误区和障碍. 基于“已知未知”、“能知想知”，研究分析学生的典型问题，正确把握教学重难点，不仅可以帮助学生找出错误产生的原因、提出改正的意见，还有助于帮助教师完善自身的知识观和教育观[9].

教师在进行学情分析时，要知道学生的典型问题是各阶导数与原函数的关系模糊，并且缺乏逻辑思维的条理性. 第一，审题不到位，错误求解 $f(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的极值点、忽略唯一性，并且只证明零点存在而非零点个数等；第二，解题思维定势，以为必须求出明确的极值点后再判断两侧符号，机械地进行求导、通分、求根等；第三，表达不规范，忽视函数的定义域、不清楚求导法则、不区分原函数与各阶导数的图象与性质等.

3.3 说学科知识

数学问题贯穿数学教学过程，蕴含着数学的基本概念和基本规则[10]. 数学学科知识不仅仅是学生所要掌握的数学基本概念、命题和法则. 教师正确把握数学知识的本质、沟通数学知识的前后联系、深挖知识蕴含的思想方法，才能从学科特色的角度解决数学问题，才能高效提升教学效果. 说学科知识能综合考察教师的专业能力和对数学本质的认识程度，是数学说题的重点.

3.3.1 把握知识本质

数学知识本质的把握情况，综合体现教师对数学课程的理解水平. 函数是描绘客观世界中变量关系和规律的最为基础的语言和工具，其本质是数集之间的单值对应. 对于上题，教师还要把握函数的极值点和零点的本质. 函数 $f'(x)$ 的极值点的本质是极值点与其附近所有点的函数值大小的比较，也是对在极值点附近的左侧和右侧函数 $f(x)$ 单调性相反的一种体现. 函数 $f(x)$ 的零点的本质是函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，是方程 $f(x)=0$ 的实数根，也是函数 $g(x)=\sin x$ 与函数 $h(x)=\ln(1+x)$ 的交点.

3.3.2 沟通知识联系

数学学习的过程就是把数学知识结构经过学生的积极思维活动，转化为头脑里的数学认知结构的过程. 教师从数学学科系统的角度沟通前后知识联系，明确知识的来龙去脉和逻辑结构，阐述当前数学题涉及内容的上下位知识，构建突出重点、精简整合的数学知识结构，是学生有效数学学习的前提.

在分析上题之前，教师要明确本题属于“函数”主线内容，所涉及的数学知识包括函数的单调性、极值点、零点、求导法则，导数的含义及其应用，函数零点存在定理等. 解决极值点问题的关键是判断定义域内点两侧的导数符号，即比较区间内一点附近的函数值. 解决零点问题的关键是利用导数求出函数的单调区间与极值点，再由函数的性质做出函数图象或者分类讨论判断零点个数. 教师正确沟通知识间的联系，才能找到解决问题的关键点.

3.3.3 深挖思想方法

数学思想方法是对数学理论和内容本质的认识，是数学科学发生、发展的根本，是数学知识在更高层次上的抽象与概括而成的数学观点[11]. 教师既要渗透抽象、推理、模型的三大基本思想，更要用联系的观点深挖蕴含在每道数学题目中的一般思想方法. 在解题教学活动中，挖掘并渗透数学思想方法，是对数学本质认识的具体表现，是促进学生经历分析和解决问题、数学知识的形成过程的基本策略，同时是学生体验思想方法一般化、程序化并掌握解题策略的有力途径，有利于学生培养数学学科核心素养.

教师要深挖上题的数学思想方法：首先，教师要引导学生从函数观点看方程问题，对于隐零点问题可以利用函数单调性求出零点大致范围，结合函数零点存在定理得出唯一极值点；然后，分类画出超越函数的大致图象，讨论在各区间上的零点情况，得出函数在定义域上的零点个数；最后，教师还可以引导学生探索其他解法，根据条件与结论的联系将零点问题转化为两个函数的交点问题，借助 Geogebra 等信息技术准确画出函数图象，渗透函数与方程、数形结合、分类讨论、转化与化归的思想方法.

3.4 说解题思路

解题思路是一个由已知到结论的推理过程，是由线索到真相的分析[10]. 疏通解题思路正是学生实现知识生长、能力提升的关键点[12]. 教师要从审题分析中有效捕捉题目信息、学情分析中正确把握最近发展区、学科知识中高效提取知识架

万方数据

构体系,并将此三部分进行有效组合.一方面确定解题策略,高屋建瓴地掌握一般解题规律和具体操作流程;另一方面指导学生作答和解题规范,引导学生培养良好的解题习惯.说解题思路是数学说题的关键.

3.4.1 确定解题策略

数学解题策略是为了达到解题目标而采取的方式方法.从自身的知识与活动经验出发,通过审题分析确定符合辩证逻辑的解题策略.一般情况下,可以采用波利亚在《怎样解题》中提出的"理解题目、拟定方案、执行方案和回顾与反思"[6]的解题策略.除此之外,还可以运用数形结合、逆向思维、分类讨论、猜想论证、函数与方程、化归等策略.

上题难点在于无法求解超越函数对应的方程;无法画出函数在$(-1,+\infty)$上的图象.第一问求证$f'(x)$存在极值点,可以求$f''(x)$的单调性并结合零点存在定理证明得出;第二问根据$f''(x)$到$f'(x)$再到$f(x)$的推理步骤求证$f(x)$的零点,即分类讨论在定义域上,由二阶导数$f''(x)$的正负与单调性得出一阶导数$f'(x)$的正负与单调性,通过特殊点确定$f'(x)$大致图象,再得出函数$f(x)$的单调性与图象,最终得出$f(x)$的零点.

3.4.2 指导解题规范

解题规范包括审题规范、逻辑规范、表达规范.解题不规范在一定程度上反映了学生解题思路上的问题.教师对数学题经过分化、重组与整合,构建能够促进学生理解的递进式的知识序列[13],并通过板书解题过程指导学生解题规范,才能发挥数学题的示范引领作用[3],清除学生的思路障碍,加强学生对解题规范的重视.

教师要结合学生的典型问题指导学生的解题规范.第一,规范审题方法,注意隐含条件和极值点的唯一性,充分理解题意;第二,规范逻辑推理思路,弄清楚各阶导数与原函数之间的关系;第三,规范表达解题过程和结果,正确表述函数零点存在定理的条件和结论,注意分类讨论时端点处的情况.

3.5 说变式拓展

变式即保持事物本质特征的前提下,改变其非本质属性.一道数学题目的价值不止在于该题的解法和结论,而是能够通过变式拓展出一类相关问题,并且促进学生能够进行知识迁移加以解决,提升学生发现、提出、分析和解决问题的能力.

3.5.1 开展变式教学

变式教学主要是指对例习题进行变通推广,让学生能在不同角度、层次、情形和背景下重新认识的一种教学模式[14],旨在源于原题、高于原题,并在学生的最近发展区拓展编制新试题,但变式要有导向性、层次性,引入变式要适时,注意学生的参与度[15],以训练学生的高级思维.教师可以在学生充分认识问题本质的基础上,从改变条件或结论、从具体到抽象、从特殊推广到一般情形、深度广度上归纳或者类比同类对象等方面对原题进行适当变形.

变式1 已知函数$f(x)=\sin x-\ln(1+x)$,$f'(x)$为$f(x)$的导数,证明:$f(x)$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$内有且仅有一个零点.

变式2(2018年高考数学全国Ⅱ卷第21题)已知函数$f(x)=e^x-ax^2$.

(Ⅰ)若$a=1$,证明:当$x\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant 1$;

(Ⅱ)若$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点,求a.

3.5.2 适当拓展延伸

建立已有知识与更高层次的数学知识的联系,能够促进对知识结构的整体认识与优化.适当的知识拓展延伸包括背景来源拓展、知识内容拓展、思想方法拓展和问题解法拓展等,一方面体现教师的知识储备和综合素养,另一方面促进学生形成有效的知识网络.教师可以引导学生运用函数零点存在定理解决不等式问题,运用函数与方程、转化与化归等思想解决超越函数问题以及数形结合思想解决几何问题,还可以推广到更一般的情况即高等数学中的介值定理,让学生初步了解连续函数的一些本质特征.

3.6 说回顾反思

美国教育心理学家波斯纳说"成长=经验+反思".在职教师已具有丰富的教学经验,获得专业成长最重要的一步是回顾反思教学实践.回顾与反思可以重现实践、总结、再实践的研究历程,是对解题活动的"再认识",是解题活动后的"元认知"[16],是深化知识理解、把握本质内涵、发展解

万方数据

题能力、优化教学过程的重要手段.

3.6.1 回顾解题过程

回顾解题过程是一个重要且有启发性的学习环节.回顾题目中所涉及的数学知识、思想方法及其之间的关系,确定审题分析是否全面、解题思路是否准确、书写过程和解题结果是否正确.教师回顾解题过程,从而发现函数的极值、零点与导数等数学知识之间的有机结构体系,以及解题过程中的不足并加以完善.

3.6.2 反思预设生成

反思预设与生成是完成解题与回顾后发挥教师主观能动性和积累教学活动经验的关键,是数学说题活动的核心和动力.重点是否突出?难点是否突破?教学目标是否达成?学生是否有兴趣?学生积极性和主体地位是否得到发挥?有哪些值得以后借鉴?有哪些不必要的错误?为什么会出现这些错误?是否还有其他解题策略?通过反思以上问题,进一步进行原因剖析、改进策略而提高解题教学的有效性.

以上题为例,教师要反思学生解题出错是因为不清楚求导法则、概念模糊,还是逻辑推理能力较弱导致解题不规范.学生对函数零点存在定理的使用条件和各阶导数与原函数的关系的掌握情况,变式拓展与学生学情的适应程度,数学思想方法的渗透情况等.

4 结语

数学说题教研活动综合考法、学法、解法与教法,是教师理解评价、理解学生、理解数学和理解教学的全过程.在说题活动中,教师既要从命题者的视角去理解数学题,还从自身解题的视角去分析数学题,也要从学生解题和学习的视角去揣摩数学题,更要从学科知识、解题理论的高度审视解题过程,最后要从评价角度回顾反思解题教学过程.教师说题时要根据数学题的特点,有机整合并且有所侧重地选择“十五个站点”内容,并非面面俱到,有所侧重,更重要的是注重问题解决的有效性,言简意赅地表达自己的教学见解,清晰凸显自身的教学个性.数学说题一方面让教师深入研究例题、习题、考试题等数学题,清楚数学题与学生层次的匹配度,进一步因材施教,引导学生升华数学思维;另一方面能够加强教师之间的业务交流,促进教师认识数学本质、提升教师核心素养和能力.

参考文献

[1]池新回,林京榕.高中数学说题教研效果欠佳的原因与对策[J].教学与管理,2019(16):61－63

[2]陈俊斌.基于教师数学现场说题教研活动的思考与认识[J].中学教研(数学),2018(1):26－30

[3]吴立宝,王富英,秦华.数学教科书例题功能的分析[J].数学通报,2013,52(3):18－20＋23

[4]吴立宝,王富英.数学教材习题“七功能”[J].教学与管理,2014(31):66－68

[5]罗增儒.中学数学解题的理论与实践[M].南宁:广西教育出版社,2008

[6]波利亚.怎样解题[M].上海:上海科技教育出版社,2011

[7]马思腾,褚宏启.基于学生核心素养发展的学情分析[J].现代教育管理,2019(5):124－128

[8]吴宝莹,陈敏.数学教学设计的取向与定位[J].数学教育学报,2012,21(3):89－90＋102

[9]郜舒竹,薛涟霞.学生错误研究之文献综述[J].数学教育学报,2009,18(1):75－78

[10]赵洪贵,吴立宝.小学数学有效说题框架与案例剖析[J].天津师范大学学报(基础教育版),2019,20(4):36－39

[11]潘超,姜志远.数学例题教学要做好“五讲”[J].教学月刊·中学版(教学参考),2013(9):46－48

[12]吴增生.数学思想方法及其教学策略初探[J].数学教育学报,2014,23(3):11－15

[13]吴立宝,王光明,王富英.教材分析的几个视角[J].教育理论与实践,2016,36(23):39－42

[14]吴莉霞,刘斌.变式教学要把握“三个度”[J].数学通报,2006(4):18－19

[15]张俊.变式不任性 教学价更高[J].数学通报,2018,57(3):46－48

[16]徐彦辉.数学解题后的“回顾与反思”与数学问题的提出——探索一种通过“回顾与反思”来提出数学问题的模式与方法[J].数学教育学报,2015,24(1):9－12

万方数据