

2.2.3 函数的极值与最值

【典型例题】

一、函数的极值

1. $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = x^3 - 3x + 2$, 则函数 $f(x)$ 的极值点为

(B)

A. 1

B. -2

C. 1或-2

D. 1或2

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$f'(x) = (x-1)^2(x+2)$$

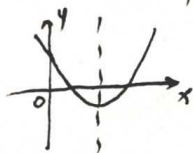
2. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = x^2 + 2ax + (4-a)\ln x$ 有两个不同的极值点, 求 a 的取值范围.

$$x > 0, \quad f'(x) = 2x + 2a + \frac{4-a}{x}$$

$$= \frac{2x^2 + 2ax + 4 - a}{x} = 0$$

$2x^2 + 2ax + 4 - a = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等根

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} > 0 \\ 4 - a > 0 \\ \Delta = 4a^2 - 8(4-a) > 0 \end{cases}$$



$$a < -4 \text{ 或 } a > 2 \quad \therefore a < -4.$$

二、函数的最值

3. (2014 四川文 21) $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1$, 若 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值.

解: $g(x) = f'(x) = e^x - 2ax - b$

$$g'(x) = e^x - 2a = 0$$

1° $a \leq 0$ 时 $g'(x) > 0$, $g(x) \uparrow$, $g(x)_{\min} = g(0) = 1 - b$

2° $a > 0$ 时 $x = \ln 2a$ 时 $g'(x) = 0$

① $\ln 2a \leq 0$ 即 $0 < a \leq \frac{1}{2}$, $g'(x) > 0$

$g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 $\uparrow$, $g(x)_{\min} = g(0) = 1 - b$

② $0 < \ln 2a < 1$ 时 $\frac{1}{2} < a < \frac{e}{2}$, $x \in (0, \ln 2a)$ $g'(x) < 0$, $g(x) \downarrow$

$x \in (\ln 2a, 1)$ $g'(x) > 0$, $g(x) \uparrow$ $g(x)_{\min} = g(\ln 2a) = 2a - 2a \ln 2a - b$

③ $\ln 2a \geq 1$ 时 $a \geq \frac{e}{2}$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 $\downarrow$
 $g(x)_{\min} = g(1) = e - 2a - b$

$$\therefore g(x)_{\min} = \begin{cases} 1 - b & a \leq \frac{1}{2} \\ 2a - 2a \ln 2a - b & \frac{1}{2} < a < \frac{e}{2} \\ e - 2a - b & a \geq \frac{e}{2} \end{cases}$$

也即 $g'(x) = e^x - 2a \in [1 - 2a, e - 2a]$ 时

① $0 \leq 1 - 2a$ ② $1 - 2a < 0 < e - 2a$ ③ $e - 2a \leq 0$

4. 设函数 $f(x) = e^x - ax + 3$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值是 4, 求 a 的值.

解法 1. 讨论 $f(x)_{\min}$

解法 2. 回到 3.2 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的最小值 $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, f(x) \geq m \text{ 恒成立} \\ \exists x \in A, f(x) = m \text{ 有解} \end{cases}$

$$\forall x \in [1, 2], e^x - ax + 3 \geq 4 \Leftrightarrow a \leq \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)_{\min}$$

$$\exists x \in [1, 2], e^x - ax + 3 = 4 \Leftrightarrow a = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$h(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2} > 0$$

$$h(x) \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上 } \uparrow \therefore h(x) \in \left[e-1, \frac{e^2-1}{2} \right]$$

$$\therefore a = e-1.$$

三、函数的图像

5. 作出下列函数的草图:

(I) $f(x) = xe^x$

(II) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

感受
关键分析趋势

$\frac{0}{0}$ 型 洛必达法则: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

6. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 与直线 $y = c$ 恰有两个交点, 则 c 的取值范围为 $\{-2, 2\}$.

7. (2013 湖北文 10) 已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围为

(B)

A. $(-\infty, 0)$

B. $(0, \frac{1}{2})$

C. $(0, 1)$

D. $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \ln x - ax + x(\frac{1}{x} - a)$$

$$= \ln x - 2ax + 1 = 0 \text{ 在 } x \in (0, +\infty) \text{ 上有两个不等根.}$$

$$\frac{\ln x + 1}{x} = 2a$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{-\ln x}{x^2} = 0$$

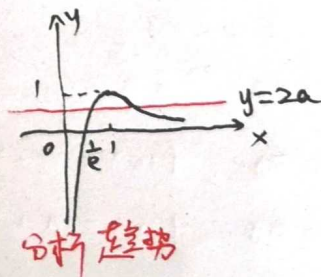
$$x = 1$$

$$x \in (0, 1) \quad h'(x) > 0, h(x) \uparrow$$

$$x \in (1, +\infty), h'(x) < 0, h(x) \downarrow$$

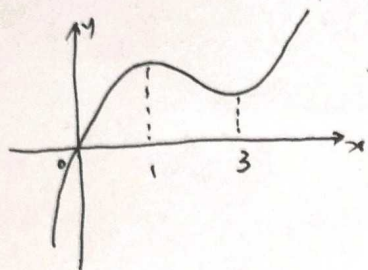
$$0 < 2a < 1$$

$$0 < a < \frac{1}{2}$$



【巩固练习】

1. 若直线 $y=b$ 与函数 $f(x)=16\ln(x+1)+x^2-10x$ 的图像有 3 个交点, 求 b 的取



$$b \in (f(3), f(1))$$

$$b \in (32\ln 2 - 21, 16\ln 2 - 9)$$

2. 已知 $y = xe^x + x^2 + 2x + a$ 恰有两个不同的零点, 则 a 的取值范围为

(B)

A. $(-\infty, \frac{1}{e} + 1]$

B. $(-\infty, \frac{1}{e} + 1)$

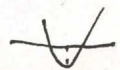
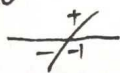
C. $(\frac{1}{e} + 1, +\infty)$

D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

$$y' = e^x + xe^x + 2x + 2$$

$$= (x+1)(e^x + 2) = 0$$

$$x = -1$$



$$f(-1) = -e^{-1} + 1 - 2 + a < 0$$

$$a < e^{-1} + 1$$

另法, 分离参数

$$-a = xe^x + x^2 + 2x$$

3. 已知 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$, 若方程 $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - m$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 m 的取值范围.

另法

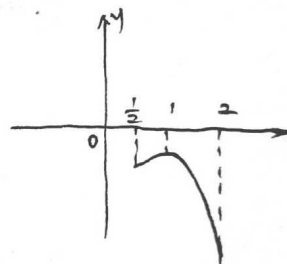
$$m = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$$

$$\hat{=} g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$$

$$g'(x) = -(x-1)(2x-1) = 0, x = \frac{1}{2}, x = 1$$

x	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$g'(x)$	0	+	0	-	-
$g(x)$		↑		↓	

$$m \in [-\frac{5}{24}, -\frac{1}{6})$$



4. 设 $a \in \mathbb{R}$, 若函数 $f(x) = e^{ax} + 3x (x \in \mathbb{R})$ 有大于零的极值点, 则

(B)

A. $a > -3$

B. $a < -3$

C. $a > -\frac{1}{3}$

D. $a < -\frac{1}{3}$

$$f'(x) = ae^{ax} + 3 = 0$$

$$f'(x) = a^2 e^{ax} > 0 \therefore f'(x) \uparrow$$

$$a > 0 \text{ 时 } f'(0) = a + 3 < 0 \quad a < -3 \text{ (舍)}$$

$$a < 0 \text{ 时 } f'(0) = a + 3 < 0 \quad a < -3$$

5. 函数 $f(x) = \ln x - x - a$ 有两个不同的零点, 则 a 的取值范围是

(B)

A. $(-\infty, -1]$

B. $(-\infty, -1)$

C. $[-1, +\infty)$

D. $(-1, +\infty)$

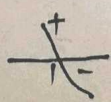
$$\ln x - x = a$$

$$x \in (0, +\infty)$$

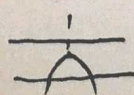
$$h(x) = \ln x - x$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} = 0$$

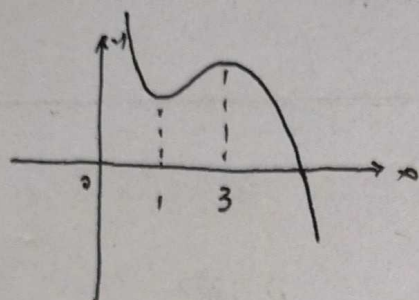
$$x = 1$$



$$h(1) = -1$$



6. 已知函数 $f(x) = -6\ln x - x^2 + 8x$ 与直线 $y = m$ 有且仅有三个交点, 求 m 的取值范围.



$$m \in (7, 15 - 6\ln 3)$$

若直线 $y = b$ 与函数 $f(x) = 16\ln(x+1) + x^2 - 10x$ 的图像有 3 个交点, 求 b 的取值范围.