第 2 课时　奇偶性、对称性与周期性

复习目标

1．结合具体函数，了解函数奇偶性的含义，
2．结合三角函数，了解函数的周期性、对称性及其几何意义，
3．数形结合研究函数的性质．

课前热身

1. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(x+2)$，且在$[-1,0]$上单调递减，设 $a=f(\sqrt{2})$，$b=f(2)$，$c=f(3)$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

A．$b<c<a$　　　B．$a<b<c$　　　C．$b<a<c$　　　D．$a<c<b$

2. (多选)下列函数中，既是偶函数又在区间(0，$+\infty$)上是增函数的有(　　)

A．$y=2^{-|x|}$　　　B．$y=x^{\frac{2}{3}}$　　　C．$y=x^2-1$　　　D．$y=x^3$

3. 已知 $f(x)=ax^2+bx$ 是定义在$[a-1,2a]$上的偶函数，那么 $a+b$ 的值是________.

4. 已知 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=3^x+m$(m 为常数)，则 $f(-\log_3 5)$的值为________.

5. 偶函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，$f(3)=3$，则 $f(-1)=$________.

6. 若 $f(x)=\ln(e^{3x}+1)+ax$ 是偶函数，则 $a=$________.

知识梳理

典例研究

考点一　函数奇偶性的判定

例1. 判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=x^3-\sin x$；　(2)$f(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x^2-3}$；　(3)$f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{|x-2|-2}$；

(4)$f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0,\\ -x^2+x, & x>0;\end{cases}$　(5)$f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$.

考点二　函数奇偶性的应用

例2.（1）设$f(x)$为奇函数，且当$x\geq0$时，$f(x)=e^x-1$，则当$x<0$时，$f(x)$等于(　　)

A．$e^{-x}-1$　B．$e^{-x}+1$　C．$-e^{-x}-1$　D．$-e^{-x}+1$

（2）若函数$f(x)=x^3\left(\dfrac{1}{2^x-1}+a\right)$为偶函数，则$a$的值为________.

（3）已知函数$f(x)=ax^3+bx^5+2$.若f(x)在区间$[-t，t]$上的最大值为M，最小值为m，则$M+m=$________.

考点三　函数的周期性、对称性

例3. (1)(2021湖南六校联考)已知定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x)=-f(x+2)$，当$x\in(0,2]$时，$f(x)=2^x+\log_2x$，则$f(2\,020)=$(　　)

A．5　B.$\dfrac{1}{2}$　C．2　D．-5

(2)函数$f(x)$满足$f(x+4)=f(x)(x\in R)$，且在区间$(-2，2]$上，$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & 0<x\leq2,\\ \left|x+\dfrac{1}{2}\right|, & -2<x\leq0,\end{cases}$

则$f(f(15))$的值为________.

（3） (多选)已知函数$f(x)$的定义域为R，对任意x都有$f(2+x)=f(2-x)$，且$f(-x)=f(x)$，则下列结论正确的是(　　)

A．$f(x)$的图象关于$x=2$对称　B．$f(x)$的图象关于$(2,0)$对称

C．$f(x)$的最小正周期为4　D．$y=f(x+4)$为偶函数

课堂小结

跟踪反馈

1. 如果 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数,那么下列函数中,一定为偶函数的是(　　)

A.$y=x+f(x)$　　B.$y=xf(x)$　　C.$y=x^2+f(x)$　　D.$y=x^2f(x)$

2．若 $f(x)=e^x-ae^{-x}$为奇函数，则满足 $f(x-1)>\frac{1}{e^2}-e^2$的 x 的取值范围是(　　)

A．(－2，＋∞)　B．(－1，＋∞)　　C．(2，＋∞)　　D．(3，＋∞)

3．已知函数 $f(x)$是定义在 R 上的周期为 2 的奇函数，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=4^x$，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)+f(1)$等于(　　)

A．－2　　B．0　　C．2　　D．1

4. 已知函数 $f(x)$对任意实数 x 满足 $f(-x)+f(x)=2$，若函数 $y=f(x)$的图象与 $y=x+1$ 有三个交点$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，$(x_3，y_3)$，则 $y_1+y_2+y_3=$________.

5．设 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，且对任意实数 x，恒有 $f(x+2)=-f(x)$．当 $x\in[0,2]$时，$f(x)=2x-x^2$.

(1)求证：$f(x)$是周期函数；

(2)当 $x\in[2,4]$时，求 $f(x)$的解析式．

6. 函数 $f(x)$的定义域为 D＝$\{x|x\neq 0\}$，且满足对于任意 x_1，$x_2\in$D，有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

(1)求 $f(1)$的值；

(2)判断 $f(x)$的奇偶性并证明你的结论；

(3)如果 $f(4)=1$，$f(x-1)<2$，且 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，求 x 的取值范围.

纠错补偿

1. 订正：　题号 $\boxed{\quad\quad}$

2. 补偿训练：