

2009届高三数学二轮专题复习

——不等式

试题特点

1、近年高考不等式试题情况统计

2008年高考各地的19套试卷中，出现不等式的选择题有25道，填空题有11道，单纯考查不等式的解答题没有；但2007年高考有解答题出现，分别是山东的线性规划应用题，湖北的不等式证明。另外，在近年的高考中，不等式与数列、函数、导数等知识结合的解答题时有出现。

2、主要特点

特点一：考小题，重在于基础。

有关不等式的小题，其考查的重点在于基础知识：其中，基本不等式、一元二次不等式、线性规划等内容的试题都突出了对不等式基础知识的考查。

试题特点

特点二:考大题,经常与其它知识相结合

考查不等式的大题中,有时是单独出现,如2007年山东的线性规划解答题,难度不算大;但经常是与其它知识相结合,如不等式与数列、数列归纳法、函数、导数等知识综合,难度属中等偏难,主要考查学生对基本知识,基本方法,基本技能的理解,掌握和应用情况.

特点三:考方法,常用在证明题中

不等式证明的常用方法:比较法,公式法,分析法,反证法,换元法,放缩法;在不等式证明过程中,应注重与不等式的运算性质联合使用;证明不等式的过程中,放大或缩小应适度.

高考命题趋势

纵观**2008**年高考全国卷和有关省市自主命题卷，关于不等式的命题有如下几个显著特点：

1. **高考题型**：不等式的试题一般是选择题或填空题为主，不等式与其它知识结合的试题多为解答题，经常与导数、数列相结合。
2. **难易程度**：不等式的选择题、填空题为基础题或中档题，考查基础知识和基本技能；而在不等式与导数相结合的试题一般考查函数的单调性，为中档题，不等式与数列结合中等偏难试题。
3. **高考热点**：随着课改的深入，线性规划的考查是高考的热点，如**2008**年高考中考查了**19**题。这部分知识在复习中应引起重视。

基于以上分析，预测在**2009**年的高考试卷中，考查不等式的题仍主要考查“三基”（基础知识、基本技能、基本思想和方法）以及综合能力，难度多为容易题和中档题，要特别重视线性规划试题。

复习备考方略

1、线性规划的内容是近年高考的热点，应加强训练，掌握方法。

2、不等式的证明题题型多变，证明思路多样，技巧性较强，加之又没有一劳永逸、放之四海而皆准的程序可循，所以不等式的证明是本章的难点. 攻克难点的关键是熟练掌握不等式的性质和基本不等式，并深刻理解和领会不等式证明中的数学转化思想.

在复习中应掌握证明不等式的常用思想方法：比较法；综合法；分析法；放缩法；反证法；导数法.

3、在复习解不等式过程中，注意培养、强化与提高函数与方程、等价转化、分类讨论、数形结合的数学思想和方法，提高分析解决综合问题的能力. 能根据各类不等式的特点，归纳出各类不等式的解法和思路以及具体解法。

考点一：不等关系与不等式

【内容解读】通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，了解不等（组）的现实背景；了解不等式的有关概念及其分类，掌握不等式的性质及其应用。

养成推理必有依据的良好习惯，不要想当然，不要错漏不等式性质使用的条件。

【命题规律】高考中，对本节内容的考查，主要放在不等式的性质上，题型多为选择题或填空题，属容易题。

考题剖析

例 1、 a, b 为实数，且 $a > b$ ，则下列不等式成立的是是（ ）

(A) $a^2 > b^2$ (B) $\frac{b}{a} < 1$

(C) $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

解：若 $a > b > 0$ 才有 (A) 成立，当 $a > 0$ 时，(B) 才成立，
当 $a = -1, b = -3$ 时， $a > b$ ，但 (C) 不成立，由指数函数的单调性，
知 (D) 是对的。故选 (D)。

[点评] 本题考查不等式的基本性质，注意不等式成立的条件。

考题剖析

例 2、(2006 上海文) 如果 $a < 0, b > 0$ ，那么，下列不等式中正确的是 ()

(A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(B) $\sqrt{-a} < \sqrt{b}$

(C) $a^2 < b^2$

(D) $|a| > |b|$

解：因为 $a < 0, b > 0$ ，所以， $\frac{1}{a} < 0, \frac{1}{b} > 0$ ，故 (A) 正确。

而 $|a|$ 与 $|b|$ 的大小不知，故 B、C、D 都不一定正确。
所以，选 (A)。

[点评] 本题考查不等式的基本性质，利用特殊值法，也能排除 B、C、D，特殊值法是解这类问题中常用的方法。

考点二：一元二次不等式及其解法

【内容解读】会从实际情况中抽象出一元二次不等式的模型，了解一元二次不等式与函数方程的联系；会解一元二次不等式，会由一元二次不等式的解求原不等式；用同解变形解不等式，分类解不等式；对解含参的不等式，对参数进行讨论；注意数形结合，会通过函数图象来解不等式。

【命题规律】高考命题中，对一元二次不等式解法的考查，若以选择题、填空题出现，则会对不等式直接求解，或经常地与集合、充要条件相结合，难度大。若以解答题出现，一般会与参数有关，或对参数分类讨论，或求参数范围，难度以中档题为主。

考题剖析

例 3、(2008 江苏高考) 已知 $A = \{x \mid (x-1)^2 < 3x-7\}$,
则 $A \cap \mathbb{Z}$ 的元素个数_____ .

解:

由 $(x-1)^2 < 3x-7$ 得 $x^2 - 5x + 8 < 0$,

$\because \Delta < 0$, $\therefore$ 集合 A 的解集为 $\emptyset$, 因此 $A \cap \mathbb{Z}$ 的元素不存在.

因此, 填: $\emptyset$

[点评] 本小题考查集合的运算和解一元二次不等式, 难度不大, 集合与不等式相结合的内容是经常考查的类型之一。

考题剖析

- 例 4**、(2007 浙江理科 1) “ $x > 1$ ” 是 “ $x^2 > x$ ” 的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

解：由 $x^2 > x$ 可得 $x > 1$ 或 $x < 0$,

所以, $x > 1$ 可得到 $x^2 > x$,

但 $x^2 > x$ 得不到 $x > 1$. 故选 A.

[点评] 本题考查一元二次不等式的解法及充要条件, 充要条件在数学中有着广泛应用, 它可以与数学中的多个知识点结合起来考查, 是一个要重点关注的内容之一。

考题剖析

考点三：简单的线性规划

【内容解读】了解二元一次不等式（组）表示的平面区域和线性规划的意义；了解线性约束条件、线性目标函数、可行解、可行域、最优解等基本概念；了解线性规划问题的图解法，并能应用线性规划的方法解决一些简单的实际问题，如给定一定数量的人力、物力资源，问怎样运用这些资源，能使完成的任务量最大，收到的效益最大；给定一项任务，问怎样安排，能使完成这项任务耗费的人力、物力资源最小．通过求解以提高解决实际问题的能力．

【命题规律】线性规划问题时多以选择、填空题的形式出现，题型以容易题、中档题为主，考查平面区域的面积、最优解的问题；随着课改的深入，近年来，以解答题的形式来考查的试题也时有出现，考查学生解决实际问题的能力。

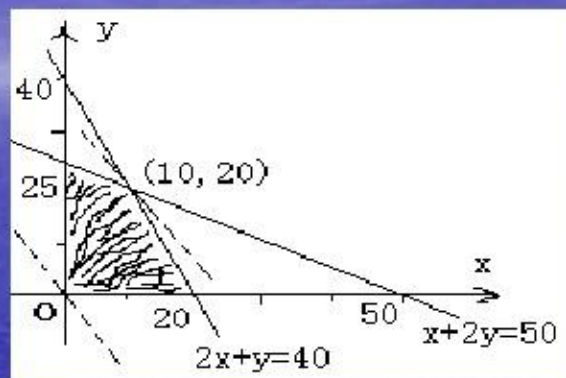
考题剖析

例 5、(2008 广东理) 若变量 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \leq 40, \\ x + 2y \leq 50, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最

大值是 ()

A. 90 B. 80 C. 70 D. 40

解: 做出可行域如图所示.



由 $z=3x+2y$, 得 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$, 令 $z=0$,

画出 $y=-\frac{3}{2}x$ 的平行线, 经过过两直线的交点时取得取值.

解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 40 \\ x + 2y = 50 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases}$.

所以 $z_{\max} = 3 \times 10 + 2 \times 20 = 70$, 故答 C.

[点评] 求最优解, 画出可行域, 将目标函数化为斜截式, 再令 $z=0$, 画它的平行线, 看 y 轴上的截距的最值, 就是最优解。

考题剖析

例 6、（2007 山东）本公司计划 2008 年在甲、乙两个电视台做总时间不超过 300 分钟的广告，广告总费用不超过 9 万元，甲、乙电视台的广告收费标准分别为 500 元/分钟和 200 元/分钟，规定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告，能给公司事来的收益分别为 0.3 万元和 0.2 万元．问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元？

解：设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为 x 分钟和 y 分钟，总收益为 z 元，由题意得

$$\begin{cases} x + y \leq 300, \\ 500x + 200y \leq 90000, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

目标函数为 $z = 3000x + 2000y$

22.05.2019

江西省赣州一中刘利剑 整理 heishu800101@163.com

考题剖析

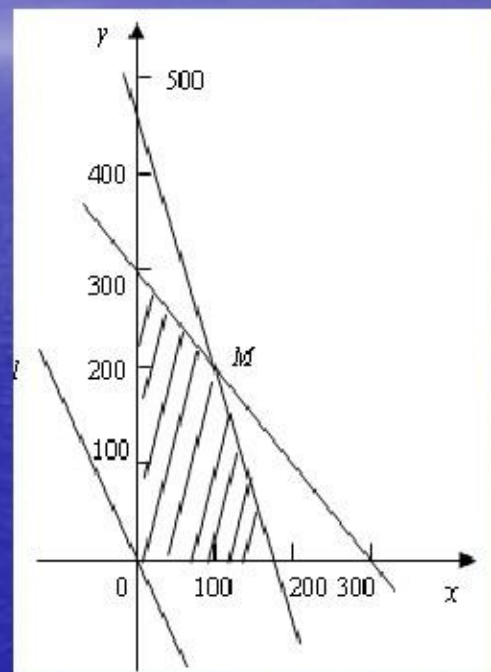
二元一次不等式组等价于
$$\begin{cases} x + y \leq 300, \\ 5x + 2y \leq 900, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域，即可行域.

如图： 作直线 $l: 3000x + 2000y = 0$ ，
即 $3x + 2y = 0$.

平移直线 l ，从图中可知，

当直线 l 过 M 点时，目标函数取得最大值.



考题剖析

$$\text{联立} \begin{cases} x + y = 300, \\ 5x + 2y = 900. \end{cases} \text{解得 } x = 100, y = 200.$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为(100,200).

$$\therefore z_{\max} = 3000x + 2000y = 700000 \quad (\text{元})$$

答：该公司在甲电视台做 100 分钟广告，在乙电视台做 200 分钟广告，公司的收益最大，最大收益是 70 万元.

[点评] 用线性规划的方法解决实际问题能提高学生分析问题、解决问题的能力，随着课改的深入，这类试题应该是高考的热点题型之一。

考点四：基本不等关系

【内容解读】了解基本不等式的证明过程，会用基本不等式解决简单的最值问题，理解用综合法、分析法、比较法证明不等式。

创设基本不等式使用的条件，合理拆分项或配凑因式是经常用的解题技巧，而拆与凑的过程中，一要考虑定理使用的条件（两数都为正）；二要考虑必须使和或积为定值；三要考虑等号成立的条件（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立），它具有一定的灵活性和变形技巧，高考中常被设计为一个难点。

【命题规律】高考命题重点考查均值不等式和证明不等式的常用方法，单纯不等式的命题，主要出现在选择题或填空题，一般难度不太大。

考题剖析

例 7、(2008 浙江文) 已知 $a \geq 0, b \geq 0$, 且 $a + b = 2$, 则 ()

(A) $ab \leq \frac{1}{2}$

(B) $ab \geq \frac{1}{2}$

(C) $a^2 + b^2 \geq 2$

(D) $a^2 + b^2 \leq 3$

解: 由 $a \geq 0, b \geq 0$, 且 $a + b = 2$,

$$\therefore 4 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2),$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 2. \text{ 所以, 选 (C).}$$

[点评] 由基本不等式: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 得 $2ab \leq a^2 + b^2$
使用基本不等式要懂得公式的正用和逆用.

考题剖析

例 8、(2007 山东理) 函数 $y = \log_a(x+3) - 1 (a > 0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A, 若点 A 在直线 $mx + ny + 1 = 0$ 上, 其中 $mn > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为_____.

解: 函数 $y = \log_a(x+3) - 1 (a > 0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A $(-2, -1)$,
 $(-2) \cdot m + (-1) \cdot n + 1 = 0$, $2m + n = 1$, $m, n > 0$,

$$\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right) \cdot (2m + n) = 4 + \frac{n}{m} + \frac{4m}{n} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{4m}{n}} = 8.$$

[点评] 本题考查对数函数图象、直线方程和基本不等式, 是一道综合题, 属中等偏难试题。

考点五：绝对值不等式

【内容解读】掌握绝对值不等式 $|x| < a$, $|x| > a$ ($a > 0$) 的解法, 了解绝对值不等式与其它内容的综合。

【命题规律】本节内容多以选择、填空题为主, 有时与充分必要条件相结合来考查, 难度不大。

例 9、(2008 上海文\理)不等式 $|x-1| < 1$ 的解集是_____.

解：由绝对值不等式，得： $-1 < x-1 < 1$ ，

即 $0 < x < 2$ ，

因此，填 $(0, 2)$

[点评] 本题直接应用绝对值不等式的公式求解即可，属容易题，送分题。

考题剖析

例 10、(2007 福建) “ $|x| < 2$ ” 是 “ $x^2 - x - 6 < 0$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解: 由 $|x| < 2$ 得 $-2 < x < 2$,
由 $x^2 - x - 6 < 0$ 得 $-2 < x < 3$,
 $-2 < x < 2$ 成立, 则有 $-2 < x < 3$,
但 $-2 < x < 3$ 成立, 不一定有 $-2 < x < 2$, 如 $x = 2.5$
故选 A.

点评: 本题考查绝对值不等式的解法, 充分条件必要条件的解法, 可以用特殊值法来验证, 充分性与必要性的成立。

考题剖析

例 11、(2007 北京文) 记关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x+1} < 0$ 的解集为 P ，
不等式 $|x-1| \leq 1$ 的解集为 Q 。

(I) 若 $a=3$ ，求 P ；

(II) 若 $Q \subseteq P$ ，求正数 a 的取值范围。

解： (I) 由 $\frac{x-3}{x+1} < 0$ ，得 $P = \{x | -1 < x < 3\}$ 。

(II) $Q = \{x | |x-1| \leq 1\} = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 。

由 $a > 0$ ，得 $P = \{x | -1 < x < a\}$ ，又 $Q \subseteq P$ ，所以 $a > 2$ ，
即 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$ 。

[点评] 主要考查绝对值不等式、分式不等式及集合，求字母的取值范围，属中档题。

考点六：不等式的综合应用

【内容解读】用不等式的性质、基本不等式、一元二次不等式等内容解决一些实际问题，如求最值，证明不等式等。

【命题规律】不等式的综合应用多以应用题为主，属解答题，有一定的难度。

考题剖析

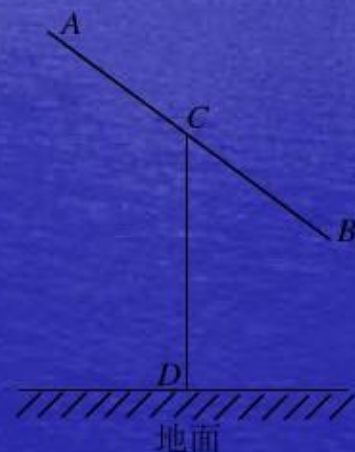
例 11、(2008 江苏模拟) 某建筑的金属支架如图所示, 根据要求 AB 至少长 2.8m , C 为 AB 的中点, B 到 D 的距离比 CD 的长小 0.5m , $\angle BCD = 60^\circ$, 已知建筑支架的材料每米的价格一定, 问怎样设计 AB , CD 的长, 可使建造这个支架的成本最低?

解: 设 $BC = am (a \geq 1.4)$, $CD = bm$. 连结 BD .

则在 $\triangle CDB$ 中, $(b - \frac{1}{2})^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos 60^\circ$.

$$\therefore b = \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{a - 1}. \therefore b + 2a = \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{a - 1} + 2a.$$

$$\text{设 } t = a - 1, t \geq \frac{2.8}{2} - 1 = 0.4,$$



考题剖析

$$\text{则 } b + 2a = \frac{(t+1)^2 - \frac{1}{4}}{t} + 2(t+1) = 3t + \frac{3}{4t} + 4 \geq 7,$$

等号成立时 $t = 0.5 > 0.4, a = 1.5, b = 4$.

答：当 $AB = 3m, CD = 4m$ 时，建造这个支架的成本最低.

[点评] 不等式的应用题在高考中经常有出现,属中档题.

考题剖析

例 12、（2008 江苏模拟）某化工企业 2007 年底投入 100 万元，购入一套污水处理设备. 该设备每年的运转费用是 0.5 万元，此外每年都要花费一定的维护费，第一年的维护费为 2 万元，由于设备老化，以后每年的维护费都比上一年增加 2 万元.

(1) 求该企业使用该设备 x 年的年平均污水处理费用 y (万元);

(2) 问为使该企业的年平均污水处理费用最低，该企业几年后需要重新更换新的污水

处理设备？

解：(1) $y = \frac{100 + 0.5x + (2 + 4 + 6 + \cdots + 2x)}{x}$

即 $y = x + \frac{100}{x} + 1.5 \quad (x > 0);$

(2) 由均值不等式得： $y = x + \frac{100}{x} + 1.5 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{100}{x}} + 1.5 = 21.5$ (万元)

当且仅当 $x = \frac{100}{x}$ ，即 $x = 10$ 时取到等号.

下课啦

